

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

NGUYỄN BÁ DUY

**PHÂN TÍCH ỨNG XỬ DÀN SANDWICH CHỨC NĂNG CHỊU TÁC
DỤNG CỦA TẢI TRỌNG CƠ - THỦY - NHIỆT**

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

NGÀNH: CƠ KỸ THUẬT

MÃ SỐ: 62520101

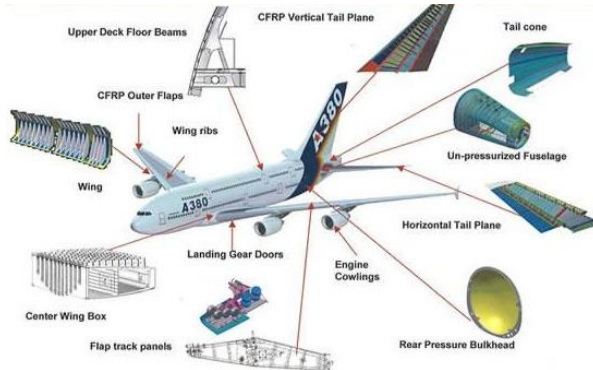
Tp. Hồ Chí Minh, tháng 9 năm 2019

Chương 1 Tổng quan

1.1 Giới thiệu và mục tiêu luận án

Do có trọng lượng nhẹ, độ bền cơ học cao... nên vật liệu composite được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau như hàng không vũ trụ (Hình. 1.1), cơ khí, xây dựng, y sinh... Cấu trúc vật liệu composite được phân ra làm hai loại chính: Cấu trúc composite nhiều lớp và vật liệu phân lớp chức năng. Cấu trúc composite nhiều lớp là những cấu trúc được làm từ nhiều lớp liên kết với nhau tại các mặt tiếp xúc của các lớp trong đó định hướng sợi của chúng có thể được thay đổi để đáp ứng được kết cấu của cấu trúc. Nhược điểm của loại cấu trúc này là sự không liên tục về vật liệu nhất là giữa các mặt tiếp xúc của chúng, sẽ gây ra sự tập trung ứng suất giữa các mặt tiếp xúc này vì vậy vật liệu này rất dễ bị tách lớp. Để giải quyết các yếu tố này, vật liệu phân lớp chức năng đã được phát triển trong đó các tính chất của vật liệu cấu thành thay đổi liên tục theo một hướng bắt buộc và do đó không có hiệu ứng tách lớp giữa các lớp vật liệu. Tuy nhiên trong thực tế, có nhiều khó khăn trong việc tạo thành loại vật liệu này.

Các ứng dụng tiềm năng của vật liệu composite trong các lĩnh vực kỹ thuật đã dẫn đến sự phát triển của lý thuyết cấu trúc composite. Các loại dầm composite là một trong những thành phần cấu trúc quan trọng nhất của trong các cấu trúc kỹ thuật đã thu hút nhiều nhà nghiên cứu với các lý thuyết khác nhau, với lời giải số và lời giải giải tích, chỉ có một số tài liệu tham khảo đại diện được trích dẫn ở đây.



Hình 1.1 Ứng dụng vật liệu composite trong kỹ thuật hàng không

<https://tantracomposite.com/>

Các mô hình dầm, đã được tổng quan trong cơ sở lý thuyết dầm composite ở các nghiên cứu của Ghugal and Shimpi [1], Sayyad and Ghugal [2]. Nhiều lý thuyết dầm đã được phát triển trong đó nó có thể được chia thành ba loại chính: lý thuyết dầm cổ điển, lý thuyết bậc nhất (dầm Timoshenko), lý thuyết dầm bậc cao. Lý

thuyết cổ điển bỏ qua các hiệu ứng biến dạng cắt ngang và do đó nó chỉ phù hợp với các cấu trúc dầm mỏng. Để khắc phục vấn đề này, lý thuyết biến dạng cắt bậc 1 chiếm hiệu ứng biến dạng cắt ngang, tuy nhiên, nó đòi hỏi một hệ số hiệu chỉnh cắt để điều chỉnh sự phân bố không đầy đủ của ứng suất cắt ngang qua độ dày của nó [3, 4]. Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao dự đoán chính xác hơn các lý thuyết khác do sự phân bố ứng suất cắt ngang thích hợp của chúng. Tuy nhiên, độ chính xác của lý thuyết này phụ thuộc vào sự lựa chọn các hàm dạng bậc cao hơn [5, 6]. Ngoài ra, một số tác giả khác đã đề xuất các mô hình và hàm biến dạng cắt bậc cao để giảm số lượng ẩn số. Cách tiếp cận này đã dẫn đến các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao tinh chế, là một tiên nghiệm hiệu quả và đơn giản [7-9]. Có thể thấy rằng việc phát triển các mô hình dầm composite đơn giản và hiệu quả là một chủ đề quan trọng được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm. Hơn nữa, khi phân tích ứng xử của dầm cần được xem xét ở quy mô kích thước rất nhỏ, các nghiên cứu thực nghiệm cho thấy hiệu ứng kích thước rất đáng kể, dẫn đến sự phát triển của lý thuyết đàn hồi phi cục bộ của Eringen [10] để phân tích các hiệu ứng của lý thuyết đàn hồi phi cục bộ này. Nó đã được sử dụng để nghiên cứu sự phân tán của sóng đàn hồi, lan truyền sóng trong vật liệu composite, y học, và sức căng bề mặt của chất lỏng. . . Sau này, Peddieson và đồng nghiệp [11] lần đầu tiên ứng dụng cơ sở lý thuyết đàn hồi phi cục bộ của Eringen [10] vào công nghệ nano để phân tích tĩnh cho cấu trúc dầm và có thêm một cơ sở lý thuyết nữa có kể đến hiệu ứng kích thước đó là lý thuyết hiệu chỉnh ứng suất (MCST), nó được phát triển bởi Yang và cộng sự [12]. Các nghiên cứu về cơ sở lý thuyết hiệu chỉnh ứng suất từ các tài liệu [13-16], thuận lợi của phương pháp này là chỉ cần thêm vào một hằng số về tỷ lệ chiều dài của của vật liệu dựa trên các thông số cố sẵn của của kích thước vật liệu. Hằng số này đã được trình bày bởi cơ sở lý thuyết [12], nó đã chứng minh rằng phần đối xứng của độ cong không xuất hiện rõ ràng trong năng lượng biến dạng. Dựa trên phương pháp này, một số nghiên cứu đã được nghiên cứu và áp dụng để phân tích các dầm micro và dầm nano được tổng hợp [17-19].

Đối với phương pháp tính toán, nhiều phương pháp tính toán đã được phát triển để dự đoán kết quả chính xác của các cấu trúc composite với các lời giải giải tích và lời giải số. Đối với lời giải giải tích, lời giải Navier có thể được xem là đơn giản nhất trong đó các biến chuyển được xấp xỉ dưới các hàm hình dạng lượng giác thỏa mãn các điều kiện biên. Mặc dù lời giải này chỉ phù hợp với điều kiện biên tựa đơn đơn giản, nhưng nó được sử dụng rộng rãi bởi nhiều tác giả bởi tính đơn giản của nó [20, 21]. Ngoài ra, phương pháp Ritz là phương pháp tổng quát nhất giải quyết cho nhiều điều kiện biên khác nhau. Tuy nhiên, độ chính xác của phương pháp này đòi hỏi phải có sự lựa chọn chính xác về các hàm hình dạng gần đúng. Các hàm dạng có thể được thỏa mãn các điều kiện biên khác nhau, hoặc, một phương thức tích hợp có thể được sử dụng để kết hợp cho các điều kiện biên khác nhau. Một số hàm dạng này đã được phát triển lời giải Ritz với các hàm dạng lượng giác, hàm mũ và đa thức để phân tích dầm composite [22-

24]. Các phương pháp phân tích khác đã được nghiên cứu để phân tích cho dầm và tấm composite như phương pháp vi phân bậc hai (DQM) được đề xuất bởi Bellman and Casti [25] đã áp dụng thành công để giải hệ phương trình vi phân phi tuyến và phân tích ứng xử của dầm composite [26, 27]. Ngoài ra, do giới hạn của lời giải giải tích trong các ứng dụng thực tế, đặc biệt đối với hình học phức tạp, phương pháp số đã được phát triển với nhiều mức độ thành công khác nhau trong đó phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) là phương pháp phổ biến nhất thu hút nhiều nhà nghiên cứu để phân tích các hành vi ứng xử dầm composite [7, 28, 29].

Tình hình nghiên cứu trong nước, phân tích ứng xử của các cấu trúc composite đã được một số nhà khoa học và nhóm nghiên cứu đặc biệt quan tâm, tiêu biểu là: Nhóm nghiên cứu của Nguyen và cộng sự [30-32]. Nguyen và cộng sự tại Đại học Tôn Đức Thắng [33-35]. Nhóm cơ học tính toán này tập trung vào phát triển các phương pháp số tiên tiến như FEM, S-FEM, phương pháp không lưới, phương pháp đẳng hình học và lý thuyết tối ưu hóa các cấu trúc cơ hệ. Nguyen [36-39] đã phát triển các phương pháp phân tích để phân tích cho tấm và vỏ composite với các hình dạng hình học và điều kiện tải khác nhau. Tran [40, 41] thực hiện một số nghiên cứu thực nghiệm về cấu trúc composite. Hoang [42, 43] nghiên cứu phản ứng của các tấm và vỏ phân lớp chức năng dưới tải trọng cơ nhiệt. Nguyen [44, 45] phân tích ứng xử của dầm phân lớp chức năng sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn trong một số điều kiện hình học và tải khác nhau. Nhóm nghiên cứu GACES ở trường Đại học sư phạm kỹ thuật Tp Hồ Chí Minh tại HCMC University of Technology and Education đã phát triển các lời giải giải tích và lời giải số cho dầm, tấm, và vỏ composite trong đó mô hình dầm và tấm chịu tác dụng của tải trọng cơ thủy nhiệt [46-48].

Từ những nghiên cứu của những nhà khoa học trong và ngoài nước, do đó “Phân tích ứng xử dầm sandwich chức năng chịu tác dụng của tải trọng cơ - thủy - nhiệt” là thực sự cần thiết.

1.2 Mục tiêu luận án

Mục tiêu của luận án là đề xuất một số mô hình của kết cấu dầm chức năng và dầm sandwich chức năng để phân tích bài toán tĩnh, lực tới hạn và tần số dao động riêng trong môi trường cơ nhiệt ẩm.

- Mục tiêu đầu tiên của luận án là giới thiệu một cách tổng quan, rõ ràng và ngắn gọn về các cơ sở lý thuyết và các phương pháp tính toán cho đối tượng nghiên cứu là dầm, từ đó đề xuất một số điểm mới cần phát triển cho luận án và các phương pháp thích hợp để giải quyết cho các điểm mới này.
- Luận án sẽ trình bày chi tiết về vật liệu composite, các cấu trúc vi mô, các phương pháp tính toán tổng quan dựa trên cơ sở lý thuyết đàn hồi. Một số nghiên cứu và đánh giá có liên quan đến luận án cũng được tổng hợp để đánh giá, phân tích và so sánh kết quả nghiên cứu với luận án, chẳng hạn như lý thuyết dầm, các phân tích và phương pháp số để phân tích bài toán tĩnh, lực tới hạn và tần số dao động riêng của kết cấu dầm trong môi trường cơ nhiệt.

- Luận án đã đề xuất ra một cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao tổng quát để phân tích, đánh giá cho kết cấu dầm sandwich chức năng. Cơ sở lý thuyết này được lấy từ cơ sở của lý thuyết đàn hồi hai chiều và sau đó được áp dụng cho dầm với các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao khác nhau. Từ đó, hai mô hình dầm khác nhau cùng được phát triển. Một là, mô hình kết cấu dầm sandwich chức năng sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao với hàm biến dạng cắt bậc cao mới được đề xuất. Hai là, kết cấu dầm được phân tích khi sử dụng lý thuyết ba biến dựa trên cơ sở của lý thuyết quasi-3D mở rộng.
- Ảnh hưởng của độ ẩm và nhiệt độ của môi trường đối với lực tới hạn và tần số dao động riêng của kết cấu dầm FG cũng được đưa ra để phân tích. Sự tác động của nhiệt độ và độ ẩm lên kết cấu dầm với nhiều phương thức khác nhau: Nhiệt độ và độ ẩm thay đổi đồng đều, tuyến tính và phi tuyến tính. Thêm vào đó, hàm dạng Ritz mới cũng được đề xuất với các điều kiện biên khác nhau để phân tích và so sánh với các nghiên cứu đáng tin cậy khác.
- Sự thay đổi kích thước ở nhiều cấp độ khác nhau của kết cấu dầm chức năng cùng với sự thay đổi của nhiệt độ môi trường và các điều kiện biên khác nhau cũng được đề xuất nghiên cứu trong luận án.
- Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích bài toán lực tới hạn và tần số dao động riêng của kết cấu dầm chức năng với các điều kiện biên khác nhau cũng được đề xuất thêm vào luận án.

1.3 Cấu trúc của luận văn

Luận văn bao gồm 7 chương, trong đó:

Chương 1: Mục tiêu của chương này là giới thiệu một tổng quan tài liệu ngắn gọn về các lý thuyết tính toán và phương pháp của dầm composite, từ đó một số phát hiện mới được tìm thấy và đề xuất.

Chương 2: Trình bày chi tiết hơn về vật liệu composite, các cấu trúc vi mô và phương pháp tính các tính chất đàn hồi hiệu quả. Một số tài liệu nghiên cứu trước cũng tập trung vào các chủ đề có liên quan đến luận án, chẳng hạn như lý thuyết dầm, phương pháp tính và các phân tích ứng xử cho uốn, lực tới hạn và dao động của dầm trong môi trường cơ nhiệt.

Chương 3: Chương này đề xuất một lý thuyết dầm biến dạng cắt bậc cao mới để phân tích các dầm sandwich chức năng. Một công thức lý thuyết chung của lý thuyết dầm biến dạng cắt bậc cao được lấy từ cơ sở của lý thuyết đàn hồi hai chiều và sau đó thu được các lý thuyết dầm biến dạng cắt bậc cao khác nhau. Thêm vào đó, hai mô hình dầm khác cũng được đề xuất. Một mô hình HSBT với hàm cắt bậc cao mới và một lý thuyết dầm biến dạng cắt ba biến đối ba biến mới được đề xuất để phân tích các dầm sandwich chức năng được đề xuất.

Chương 4: Chương này phân tích các ảnh hưởng của độ ẩm và nhiệt độ tăng lên đối với dao động và lực tới hạn do nhiệt của dầm sandwich chức năng. Công trình hiện tại dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao, với sự phân bố dạng hyperbol của các chuyển vị trong mặt phẳng và ngoài mặt phẳng. Nhiệt độ và độ ẩm được cho là thay đổi đồng đều, tuyến tính và phi tuyến tính.

Chương 5: Chương này đề xuất những ảnh hưởng của tỷ lệ kích thước để phân tích hành vi ứng xử của dao động tự do và lực tới hạn do nhiệt của dầm chức năng trong môi trường nhiệt độ. Một công thức lý thuyết chung xuất phát từ cơ sở lý thuyết đàn hồi hai chiều. Ảnh hưởng của các điều kiện biên đối với các hành vi ứng xử của dầm chức năng cũng được xem xét.

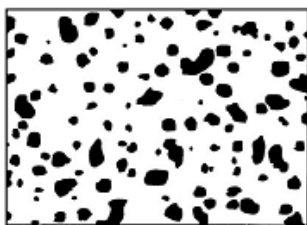
Chương 6: Sử dụng phương pháp phân tử hữu hạn để phân tích dao động và lực tới hạn cho dầm chức năng dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao được trình bày. Phương trình chuyển động và điều kiện biên dựa trên nguyên lý Hamilton. Ảnh hưởng của hằng số phân bố vật liệu, tỷ lệ giữa chiều dài/chiều cao và các điều kiện biên khác nhau đối với tần số dao động, lực tới hạn của dầm chức năng được thảo luận.

Chương 7: Chương này trình bày tóm tắt tổng quát các kết luận quan trọng của luận án này được trình bày. Các công việc tiếp theo liên quan đến nghiên cứu của được đề xuất cho các nghiên cứu trong tương lai gần.

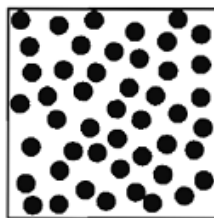
Chương 2: Tổng quan về hành vi ứng xử của dầm chức năng chịu tác động trong môi trường cơ thủy nhiệt

2.1 Vật liệu Composite và vật liệu phân lớp chức năng

Vật liệu Composite: là một loại vật liệu được tổ hợp từ hai hay nhiều loại vật liệu khác nhau trong đó bao gồm vật liệu nền và cốt gia cường, tạo nên một loại vật liệu mới có tính năng ưu việt hơn so với từng thành phần vật liệu riêng lẻ. Vật liệu nền có vai trò định vị và giữ ổn định cấu trúc của chúng thường được cấu tạo từ polyme, kim loại, hợp kim, gốm, vữa xi măng . . . Vật liệu cốt gia cường được cấu tạo từ các sợi thủy tinh, sợi polyme, sợi gốm, sợi kim loại, sợi cacbon... hoặc là các loại hạt như kim loại và phi kim...



a)

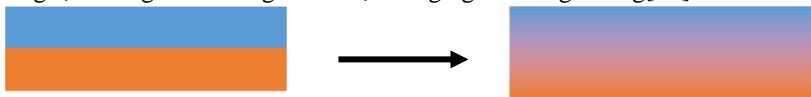


b)

Hình 2.1 Vật liệu composite từ nhiều phần tử

https://www.researchgate.net/figure/Different-types-of-composite-materials_fig2_313880039

Khái niệm FGM xuất hiện lần đầu tiên vào giữa thập niên 1980 tại Nhật Bản bởi một nhóm các nhà khoa học vật liệu, những người đã tạo ra một loại vật liệu mới chống lại những ảnh hưởng của nhiệt trong ngành hàng không[49].

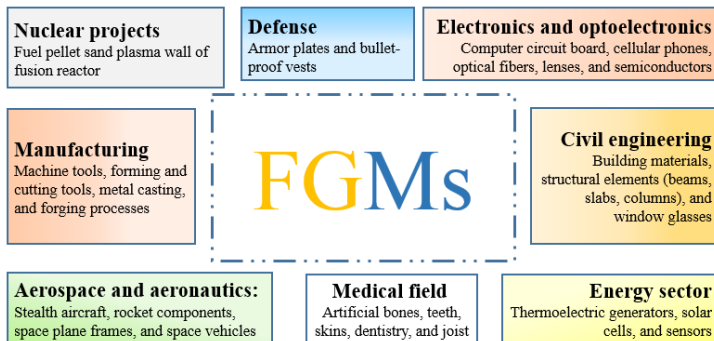


(a) Vật liệu Composite nhiều lớp

(b) Vật liệu phân lớp chức năng

Hình 2.2 Vật liệu composite phân lớp và phân lớp chức năng FGM

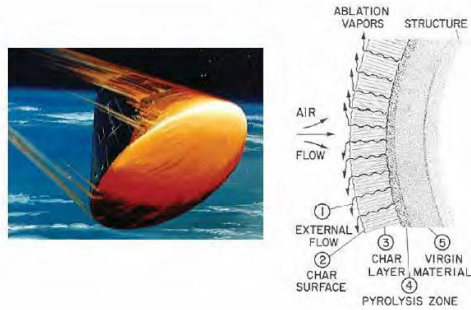
Vật liệu phân lớp chức năng (FGMs): Vấn đề tập trung ứng suất sẽ được giảm thiểu đáng kể nếu sự thay đổi các đặc tính từ vật liệu này đến vật liệu khác tại các phân lớp diễn ra từ từ. Nguyên tắc này là cơ sở để hình thành và phát triển phần lớn các vật liệu phân lớp chức năng. Vật liệu phân lớp chức năng (FGM) là một loại composite đặc biệt có các đặc trưng vật liệu thay đổi liên tục nhằm cải thiện và tối ưu khả năng chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ của kết cấu. Điều này có được từ việc chế tạo loại vật liệu có sự thay đổi dần dần (quy luật gradient) của cấu trúc vật liệu nhằm tối ưu sự làm việc của từng loại vật liệu. Khái niệm FGM xuất hiện lần đầu tiên vào giữa thập niên 1980 tại Nhật Bản bởi một nhóm các nhà khoa học vật liệu, những người đã tạo ra một loại vật liệu mới chống lại những ảnh hưởng của nhiệt trong ngành hàng không và sau đó được ứng dụng cho nhiều lĩnh vực khác nhau ([50, 51]) (Hình 2.3).



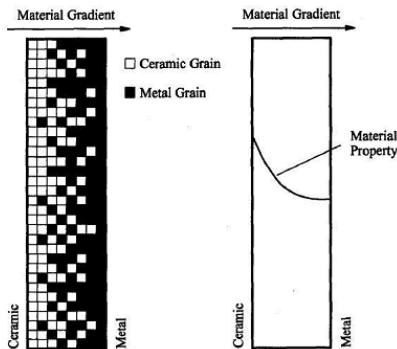
Hình 2.3 Các lĩnh vực ứng dụng của FGMs [51].

FGM được ứng dụng nhiều trong môi trường có sự làm việc khắc nghiệt như lá chắn nhiệt của tàu vũ trụ, thiết bị đẩy phản lực, vỏ lò tinh luyện các loại xỉ, quặng khai khoáng, các bộ phận động cơ, thiết bị tiếp xúc với nguồn điện công suất lớn... Ví dụ như trong các lớp cách nhiệt truyền thống của các thiết bị chịu nhiệt cao, một lớp vật liệu gốm sẽ được tráng lên các kết cấu kim loại, tuy nhiên sự thay đổi đột ngột tại vị trí tiếp xúc giữa 2 vật liệu khác nhau sẽ gây ra sự tập trung lớn ứng suất, dẫn đến hình thành biến dạng dẻo hoặc nứt. Những ảnh hưởng tiêu cực đó có thể được giảm nhẹ bằng cách sắp xếp vật liệu thay đổi liên tục theo

các vật liệu thành phần, tại những vị trí cần chịu nhiệt và ăn mòn cao thì hàm lượng gốm cao, ngược lại kim loại được tập trung tại những vị trí cần các tính năng cơ học có tính dẻo dai... Hình 2.4 là ứng dụng của FGM trong ngành vũ trụ



Hình 2.4 Ứng dụng vật liệu chức năng trong lĩnh vực hàng không vũ trụ



Hình 2.5 Mô hình rời rạc và mô hình liên tục [52].

2.2 Tính chất đàn hồi đồng nhất của dầm phân lớp chức năng

2.2.1 Kết cấu dầm phân lớp chức năng

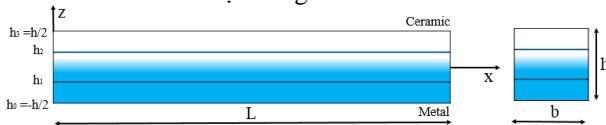
Xét dầm FGM như Hình 2.6 với chiều dài L và diện tích mặt cắt ngang là $b \times h$ có các đặc trưng vật liệu: môđun đàn hồi Young (E), hệ số Poisson (ν) và khối lượng riêng (ρ) thay đổi liên tục theo chiều dày dầm. Ba loại dầm được xét đến trong luận án



(a) **Loại A:** Dầm chức năng 1 lớp



(b) **Loại B:** Dầm phân lớp chức năng với lớp mặt là vật liệu FG và lớp lõi là vật liệu đồng nhất.



(c) **Type C:** Dầm phân lớp chức năng với lớp mặt là vật liệu đồng nhất và lớp lõi là vật liệu FG.

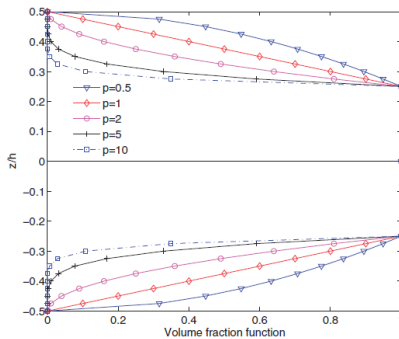
Hình 2.6 Cấu tạo mặt cắt ngang của kết cấu dầm phân lớp chức năng

2.2.2 Đặc trưng hữu hiệu theo quy luật lũy thừa hệ số mũ p (power-law)

Đặc trưng hữu hiệu của dầm phân bố hàm lũy thừa hệ số mũ p [53] được xác định:

$$P(z) = (P_c - P_m)V(z) + P_m \quad (2.1)$$

trong đó $V(z)$ là các hàm mật độ thể tích:



Hình 2.7 Hàm mật độ thể tích $V(z)$ dầm loại B.

➤ **Loại A:** Hàm mật độ thể tích $V(z)$ cho dầm loại A

$$V(z) = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^p \text{ với } z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \quad (2.2)$$

➤ **Loại B:** Hàm mật độ thể tích $V(z)$ cho dầm loại B

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0} \right)^p; & z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = 1; & z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3} \right)^p; & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (2.3)$$

➤ **Loại C:** Hàm mật độ thể tích $V(z)$ cho dầm loại C

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = 0; & z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = \left(\frac{z-h_1}{h_2-h_1} \right)^p; & z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = 1; & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (2.4)$$

2.3 Sự thay đổi nhiệt độ và độ ẩm trong dầm FG

Được biết, sự gia tăng của nhiệt độ và độ ẩm ảnh hưởng đến hành vi ứng xử của dầm FG. Để nghiên cứu những ảnh hưởng này, nhiều công trình trước đó đã được thực hiện như đã đề cập trong Phần 2.1, trong đó có thể phân biệt thành ba trường hợp khác nhau: Độ ẩm và nhiệt độ thay đổi theo quy luật phân bố đều, độ ẩm và nhiệt độ thay đổi theo quy luật phân bố tuyến tính, độ ẩm và nhiệt độ thay đổi theo quy luật phân bố phi tuyến.

2.3.1 Nhiệt độ và độ ẩm phân bố đều

Nhiệt độ và độ ẩm được cho là thay đổi đều trong dầm và tăng từ một tham chiếu T_0 và C_0 và do đó, các giá trị nhiệt độ và độ ẩm hiện tại của chúng được tuân theo [54].

$$T = T_0 + \Delta T, \quad C = C_0 + \Delta C \quad (2.5)$$

Trong đó T_0 và C_0 lần lượt là nhiệt độ và độ ẩm tham chiếu, được cho là ở bề mặt dưới cùng của dầm.

2.3.2 Nhiệt độ và độ ẩm phân bố tuyến tính

Nhiệt độ và độ ẩm tăng lên theo quy luật phân bố tuyến tính [55].

$$T(z) = (T_t - T_b) \left(\frac{2z+h}{2h} \right) + T_b, \quad C(z) = (C_t - C_b) \left(\frac{2z+h}{2h} \right) + C_b \quad (2.6)$$

Trong đó T_t và T_b là nhiệt độ cũng như C_t và C_b là độ ẩm tại mặt trên cùng và mặt dưới cùng của dầm.

2.3.3 Nhiệt độ và độ ẩm phân bố phi tuyến

Nhiệt độ và độ ẩm tăng lên theo quy luật phân bố phi tuyến theo quy luật hình sin [56] như sau.

$$T(z) = (T_t - T_b) \left[1 - \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{2z+h}{2h} \right) \right] + T_b, C(z) = (C_t - C_b) \left[1 - \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{2z+h}{2h} \right) \right] + C_b \quad (2.7)$$

Thêm vào đó, Nhiệt độ phân bố theo phương trình Fourier của truyền nhiệt một chiều ở trạng thái ổn định cũng được xem xét:

$$T(z) = T_b + \frac{T_t - T_b}{\int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{k(z)} dz} \int_{-h/2}^z \frac{1}{k(z)} dz \quad (2.8)$$

2.4 Lý thuyết dầm FG

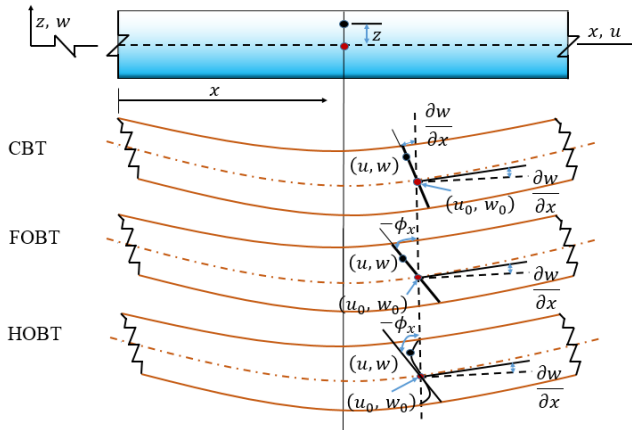
Động học của dầm FG có thể được biểu diễn bằng cách sử dụng các cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSSTs).

2.4.1 Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao

Cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao được sử dụng phổ biến được thể hiện như sau:

$$u_1(x, z, t) = u(x, t) - zw_x(x, t) + f(z)\theta(x, t); u_3(x, z, t) = w(x, t) \quad (2.9)$$

Trong đó $f(z)$ là hàm biến dạng cắt



Hình 2.8 Mô hình dầm theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao

Ngoài ra, khi chuyển vị ngang được phân chia thành hai thành phần: Chuyển vị uốn $w_b(x, t)$ và chuyển vị cắt $w_s(x, t)$, trường chuyển vị được viết lại như sau:

$$u_1(x, z, t) = u(x, t) - zw_{b,x}(x, t) + (f(z) - z)w_{s,x}(x, t)$$

$$u_3(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t)$$
(2.10)

2.4.2 Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao tiếp cận ba chiều

Trường chuyển vị của Quasi-3D:

$$u_1(x, z, t) = u(x, t) - zw_{,x} + f(z)\theta(x, t)$$

$$u_3(x, z, t) = w(x, t) + g(z)w_z(x, t)$$
(2.11)

Trong đó u, w, θ_x và w_z là các thành phần chuyển vị và góc xoay. $f(z)$ là hàm biến dạng cắt bậc cao, và $g(z) = df/dz$

2.4.3 Tổng quan hàm biến dạng cắt

A. Ứng suất cắt của dầm có tiết diện hình chữ nhật

Ứng suất cắt ngang của dầm đồng nhất tiết diện hình chữ nhật được biểu thị bằng biểu thức sau:

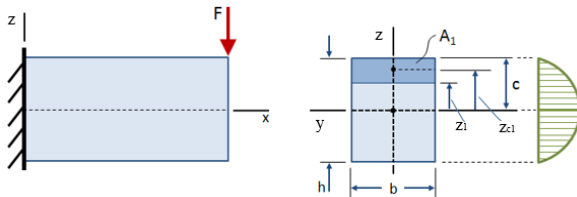
$$\sigma_{xz}(x, z) = \frac{QS_y}{bI_y}$$
(2.12)

Trong đó Q là lực cắt ngang dầm; $I_y = \frac{bh^3}{12}$ là mô men quán tính của tiết diện dầm; b là chiều rộng của mặt cắt; S_y là diện tích của phần mô đun tính toán được tính như sau:

$$S_y = \int_{z_1}^c z dA = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z_1^2 \right)$$
(2.13)

Đưa phương trình (2.13) vào phương trình (2.12) dẫn đến giá trị ứng suất cắt tại bất kỳ điểm nào theo phương z được viết lại như sau:

$$\sigma_{xz}(x, z) = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - z_1^2 \right)$$
(2.14)



Hình 2.9 Ứng suất cắt thay đổi theo chiều dày dầm

Sự thay đổi ứng suất cắt ngang dịch chuyển theo chiều cao dầm được thể hiện như hình 2.9 và phương trình (2.14) cho thấy rằng, nó thỏa mãn các điều kiện biên bằng 0 khi có lực kéo ở bề mặt trên và dưới của dầm và ứng suất cắt thay

đổi theo đa thức bậc hai của z . Thêm vào đó, nếu các trường chuyển vị của dầm cho trong phương trình. (2.9, 2.10) được xem xét, các hàm biến dạng cắt của dầm đồng nhất phải là một đa thức bậc ba.

B. Tổng quan hàm biến dạng cắt bậc cao

Hàm biến dạng cắt bậc cao $f(z)$ này đã thu hút nhiều nghiên cứu với sự lựa chọn của các hàm cắt đa thức và không đa thức khác nhau. Bảng 2.1 tóm tắt một số đại diện cho các hàm cắt.

Bảng 2.1 Hàm biến dạng cắt bậc cao $f(z)$

Tác giả	$f(z)$
Hàm đa thức:	
Reddy[57], Murthy[58], Levinson [38]	$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Kaczkowski [59], Reissner [60], Panc [61]	$f(z) = z \left(\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2} \right)$
Ambartsumian [22]	$f(z) = \frac{h^2}{8} z - \frac{z^3}{6}$
Hàm lượng giác:	
Nguyen et al. [62]	$f(z) = \cot^{-1} \left(\frac{h}{z} \right) - \frac{16z^3}{15h^3}$
Nguyen et al. [22]	$f(z) = h \tan^{-1} \left(\frac{rz}{h} \right) - \frac{16rz^3}{3h^2(r^2 + 4)}; r = 1$
Touratier[63], Levy[60], Stein[64]	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$
Hàm mũ:	
Karama et al.[65]	$f(z) = ze^{-2(z/h)^2}$
Hàm Hyperbolic:	
Soldatos[57]	$f(z) = h \sinh \left(\frac{z}{h} \right) - z \cosh \left(\frac{1}{2} \right)$
Akavci[61]	$f(z) = \frac{3\pi}{2} \operatorname{htanh} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{3\pi}{2} z \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \right)$

C. Đề xuất hàm biến dạng cắt bậc cao mới

Nguyên tắc thiết lập hàm biến dạng cắt cao:

- Hàm liên tục

- Mặt biên dạng là mặt cong.
- Thỏa mãn điều kiện tự do ứng suất cắt tại biên trên và dưới của tấm.
- Gồm hai thành phần: 1 thành phần là hàm bậc 3 tương ứng với vật liệu đồng nhất và 1 thành phần phù hợp cho vật liệu FGM.

Vì vậy, hàm dạng $f(z)$ được chọn dưới dạng sau:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = f_1(z) + \xi z^3 \quad (2.15)$$

trong đó ξ là hằng số. Hàm biến dạng cắt bậc cao đề xuất của luận án (NPT) có dạng như sau:

$$f(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{rz}{h}\right) - \frac{8rz^3}{3h^3\sqrt{r^2+4}} \quad (2.16)$$

và đạo hàm của nó được thể hiện bởi:

$$g(z) = \frac{r}{\sqrt{r^2z^2+h^2}} - \frac{8rz^2}{h^3\sqrt{r^2+4}} \quad (2.17)$$

trong đó r là tham số hiệu chỉnh (Luận án chọn $r=1$ để phân tích ứng xử cho kết cấu dầm FGM).

2.4.4 Lý thuyết đàn hồi phi cục bộ và hiệu chỉnh ứng suất cho dầm.

Lý thuyết đàn hồi phi cục bộ: Các nghiên cứu thực nghiệm gần đây đã chỉ ra rằng khi các ứng xử của dầm được xem xét ở quy mô nhỏ, hiệu ứng kích thước là rất đáng kể. Một số cơ sở lý thuyết đã được phát triển trong đó nó có thể được hợp nhất thành lý thuyết đàn hồi phi cục bộ Eringen, lý thuyết hiệu chỉnh ứng suất với các mức độ thành công khác nhau. Dựa trên lý thuyết đàn hồi phi cục bộ của Eringen [66], phương trình cấu thành như sau:

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij} = t_{ij} \quad (2.18)$$

Trong đó ∇ biểu thị toán tử Laplacian; $\mu = (e_0 a)^2$ là hệ số tỉ lệ theo chiều dài dầm và t_{ij} là các ứng suất cơ bản. Do đó phương trình quan hệ ứng suất và biến dạng của dầm nano FG có dạng.

$$\sigma_x - \mu \sigma_{x,xx} = \bar{Q}_{11}(z) \varepsilon_x; \quad \sigma_{xz} - \mu \sigma_{xz,xx} = \bar{Q}_{55}(z) \gamma_{xz} \quad (2.19)$$

Lý thuyết hiệu chỉnh ứng suất: Theo Lý thuyết hiệu chỉnh ứng suất được đề xuất bởi Yang và các cộng sự [12], hàm mật độ năng lượng biến dạng là một hàm của cả tenxơ biến dạng (liên hợp với tenxơ ứng suất) và tenxơ góc xoay (liên hợp với tenxơ hiệu chỉnh ứng suất). Sau đó, năng lượng biến dạng trong một thể hợp

nhất đẳng hướng đàn hồi tuyến tính bị biến dạng chiếm một thể tích V có thể được viết là

$$U_M = \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m} \boldsymbol{\chi}) dV \quad (2.20)$$

Các tensor được xác định như sau:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{m} = 2l^2 \mu \boldsymbol{\chi} \quad (2.22)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (2.23)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2} [\nabla \theta + (\nabla \theta)^T] \quad (2.24)$$

Trong đó \mathbf{u} là các vector chuyển vị thẳng, λ and μ là hằng số Láme, l là tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu phản ánh ảnh hưởng của hiệu chỉnh ứng suất, và θ là góc xoay được xác định như sau:

$$\theta = \frac{1}{2} \text{curl } \mathbf{u} \quad (2.25)$$

Dựa trên các phương trình (2.9) - (2.10), góc quay quanh các trục tọa độ x -, y -, z - được thêm vào động học của nó như sau:

$$\theta_x(x, z, t) = \frac{1}{2} (u_{1,y} + u_{2,z}) = 0; \theta_z(x, z, t) = \frac{1}{2} (u_{2,x} - u_{1,y}) = 0 \quad (2.26)$$

$$\theta_y(x, z, t) = \frac{1}{2} (u_{1,z} + u_{3,x})$$

Thay phương trình (2.26) vào phương trình (2.24) ta được:

$$\chi_{xy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \quad \chi_{zy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial z}, \quad \chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi_{xz} = 0 \quad (2.27)$$

2.5 Phương pháp giải tích và phương pháp số để phân tích dầm FG.

2.5.1 Lờ giải Navier

Các biến chuyển vị được tính gần đúng theo các hàm lượng giác thỏa mãn các điều kiện biên đơn giản được hỗ trợ. Ví dụ, Trường chuyển vị trong các phương trình. (2.9-2.10) như sau:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^N u_j \cos \alpha_j x e^{i\omega t}, \quad w(x, t) = \sum_{j=1}^N w_j \sin \alpha_j x e^{i\omega t}, \quad \theta(x, t) = \sum_{j=1}^N \theta_j \cos \alpha_j x e^{i\omega t} \quad (2.28)$$

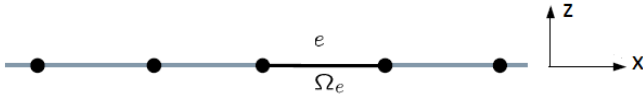
2.5.2 Lờ giải Ritz

Dựa trên lờ giải Ritz, trường chuyển vị được xấp xỉ như sau:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^N \psi_j(x) u_j(t), \quad w(x, t) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x) w_j(t), \quad \theta(x, t) = \sum_{j=1}^N \psi_j(x) \theta_j(t) \quad (2.29)$$

2.5.3 Phương pháp phần tử hữu hạn (FEM)

Dầm được chia thành nhiều phần tử $\Omega = \bigcup_{\Omega_e \in \Omega} \Omega_e$ như hình 2.10.



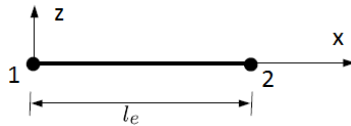
Hình 2.10 Dầm rời rạc thành các phần tử hữu hạn.

Trên mỗi phần tử có các chuyển vị và hàm kiểm tra được nội suy bằng các hàm hình dạng và các giá trị nút tương ứng.

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^n \psi_j(x) u_j, w(x, t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) w_j, \theta(x, t) = \sum_{j=1}^n \psi_j(x) \theta_j \quad (2.30)$$

Trong đó n là số nút trên mỗi phần tử, u_j, w_j, θ_j là các chuyển vị tại nút; $\psi_j(x)$ và $\varphi_j(x)$ là các hàm dạng tại nút j .

Hàm dạng tuyến tính:



Hình 2.11 Hàm dạng tuyến tính của một phần tử có chiều dài l_e

Hàm dạng tuyến tính là đa thức nhất cho phần tử dầm 2 nút trong Hình 2.11 được rút ra từ hai điều kiện chuyển vị tại hai nút, được viết dưới dạng sau:

$$\psi_1(x) = 1 - \frac{x}{l_e}, \psi_2(x) = \frac{x}{l_e} \quad (2.31)$$

Hàm dạng Hermite:

Hàm dạng Hermite cho dầm là một đa thức bậc 3 được tính gần đúng thông qua giá trị của chuyển vị tuyến tính theo hướng z và đạo hàm của nó tại các nút. Nó được đưa ra như sau:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{l_e}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l_e}\right)^3; \varphi_2(x) = x - \frac{2x^2}{l_e} + \frac{x^3}{l_e^2} \\ \varphi_3(x) &= 3\left(\frac{x}{l_e}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l_e}\right)^3; \varphi_4(x) = -\frac{x^2}{l_e} + \frac{x^3}{l_e^2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.6 Kết luận

Chương này tập trung vào đánh giá các tài liệu về các kỹ thuật mô hình hóa và phương pháp giải cho phân tích uốn, tới hạn và dao động của dầm FG và dầm phân lớp chức năng dựa trên cả lý thuyết hiệu chỉnh cắt bậc thấp và lý thuyết

biến dạng cắt bậc cao. Kết luận sau đây có thể được rút ra dựa trên các tài liệu được xem xét.

- ✚ Có rất ít nghiên cứu được tìm thấy về lời giải chính xác cho lý thuyết đàn hồi để phân tích uốn, tới hạn và dao động tự do cho dầm chức năng đơn lớp và dầm phân lớp chức năng với các điều kiện biên khác nhau; tuy nhiên, các lời giải chính xác để phân tích dầm phân lớp chức năng cũng không được tìm thấy trong luận án này.
- ✚ Quy luật phân bố vật liệu theo chiều dày dầm đã được công bố rất thuận tiện khi giải quyết cho các cơ sở lý thuyết đàn hồi cũng có rất ít về các nghiên cứu này; Vì vậy, các lời giải chính xác về dầm chức năng với sự phân bố vật liệu cũng như tính chất của vật liệu khác nhau cũng rất hiếm.
- ✚ Trong toàn bộ tài liệu nghiên cứu trước, người ta chú ý nhiều hơn đến giải pháp phân tích 1D bằng cách sử dụng lời giải Navier dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và lý thuyết biến dạng cắt bậc cao bỏ qua biến dạng ngang bình thường. Theo như các tác giả biết, các giải pháp phân tích dựa trên các lý thuyết bậc cao xem xét ảnh hưởng của cắt ngang và biến dạng bình thường (quasi-2D) hiếm khi có sẵn trong tài liệu. Do đó, các nhà nghiên cứu có thể nỗ lực hướng tới việc phát triển các giải pháp phân tích cho chàm bánh sandwich FG dựa trên các lý thuyết quasi-2D tinh chế.
- ✚ Nghiên cứu quan trọng có sẵn khi phân tích dầm FG và dầm phân lớp chức năng trong đó tính chất phân bố vật liệu theo quy luật hàm mũ p ; tuy nhiên, theo nghiên cứu của các tác giả, có rất ít bài báo trình bày tổng quát về việc sử dụng quy luật hàm mũ, quy luật sigmoid và quy luật Mori-Tanaka để phân loại vật liệu.
- ✚ Có rất ít nghiên cứu về phân tích ứng xử của dầm FG và dầm phân lớp chức năng khi chịu ảnh hưởng của Cơ Thủy Nhiệt nên luận án sẽ tập trung phân tích tổng quát về các yếu tố này khi tác động lên dầm.
- ✚ Các nghiên cứu liên quan đến một số vấn đề phức tạp như giải pháp phân tích dầm 2D-FGM rất hạn chế trong tài liệu. Do đó, các phương pháp số như phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp Ritz, v.v ... được sử dụng rộng rãi và đã cho thấy sự tiến bộ lớn trong việc phân tích các vấn đề phức tạp như 2D-FGM.

Chương 3 Các cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao để phân tích ứng xử dầm đẳng hướng và dầm phân lớp chức năng

3.1 Giới thiệu

Chương này nhằm mục đích trình bày các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao thống nhất để phân tích uốn, tới hạn và dao động tự do của dầm phân lớp chức năng trong đó một công thức lý thuyết tổng quát mới dựa trên cơ sở lý thuyết đàn hồi, một hàm dạng hyperbol ngược mới cho lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và lý

thuyết tiếp cận ba chiều (quasi-3D) mới được đề xuất. Hàm biến thiên của Hamilton và Lagrange được sử dụng để rút ra các phương trình đặc trưng của chuyển động, và sau đó các lời giải Navier và Ritz được áp dụng để giải quyết các vấn đề. Dầm phân lớp chức năng được chia ra làm 3 loại: dầm chức năng (Loại A), Lớp mặt là vật liệu chức năng và lớp lõi là vật liệu đồng nhất cứng hoặc mềm (Loại B) và lớp lõi là vật liệu chức năng và lớp mặt là vật liệu đồng nhất (Loại C). Các kết quả số được so sánh với các kết quả nghiên cứu uy tín trước đây.

3.2 Xây dựng cơ sở lý thuyết tổng quát cho dầm biến dạng cắt bậc cao

Cấu tạo dầm như hình 2.1 với chiều dài là L và diện tích mặt cắt ngang $b \times h$. Để xác định trường chuyển vị động học của dầm, ứng suất phẳng trong hệ tọa độ (x, z) được giả định.

Quan hệ của ứng suất và biến dạng trong mặt phẳng được xác định:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_z), \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x), \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\sigma_{xz} \quad (3.1)$$

Trong đó: E, ν là mô đun đàn hồi Young's và hệ số Poisson; G là mô đun cắt. quan hệ tuyến của biến dạng và chuyển vị được thể hiện như sau:

$$\varepsilon_x = u_{,x}, \varepsilon_z = w_{,z}, \gamma_{xz} = u_{,z} + w_{,x} \quad (3.2)$$

Chuyển phương trình 3.2 vào phương trình 3.1, ta được:

$$u_{,x} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_z) \quad (3.3a)$$

$$w_{,z} = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x) \quad (3.3b)$$

$$u_{,z} + w_{,x} = \frac{1}{G}\sigma_{xz} \quad (3.3c)$$

Bằng cách giả sử rằng $\sigma_{xz}(x, z) = g_1(z)Q_x(x)$ trong đó $Q_x(x)$ là lực cắt ngang, $g_1(z)$ là một hàm hình dạng thỏa mãn các điều kiện biên không có lực kéo ở bề mặt trên và dưới của dầm. Tích phân phương trình 3.3b ta được:

$$w(x, z) = w_0(x) + \int_0^z \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x) dz \quad (3.4)$$

Đưa phương trình 3.4 vào phương trình 3.3c khi đó phương trình được viết lại như sau:

$$u_{,z} + w_{,x} = -w_{0,x}(x) - \int_0^z \frac{1}{E}(\sigma_{z,x} - \nu\sigma_{x,x}) dz + \frac{g_1(z)}{G}Q_x(z) \quad (3.5)$$

Nếu thành phần trong dấu tích phân được bỏ qua, tích phân phương trình 3.5 theo phương z , ta thu được:

$$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + f_1(z)Q_x(x) \quad (3.6)$$

Với $f_1(z) = g_1(z)/G$. Thêm vào đó, phương trình cân bằng của dầm khi bỏ qua các lực thể tích được viết như sau:

$$\sigma_{x,x} + \sigma_{xz,z} = 0, \quad \sigma_{xz,x} + \sigma_{z,z} = 0 \quad (3.7)$$

Từ đó bằng cách bỏ qua các hệ số tích phân, ứng suất pháp và ứng suất tiếp được xác định từ ứng suất cắt ngang như sau:

$$\sigma_x(x, z) = -g_1'(z)R_x(x), \quad \sigma_z(x, z) = -g_2(z)Q_{x,x} \quad (3.8)$$

Trong đó,

$$R_x(x) = \int_0^x Q_x dx, \quad g_2(z) = \int_0^z g_1(z) dz \quad (3.9)$$

Đưa phương trình 3.8 vào phương trình 3.4 ta được:

$$w(x, z) = w_0(x) - f_2(z)Q_{x,x} + f_3(z)R_x \quad (3.10)$$

Trong đó

$$f_2(z) = \int_0^z \frac{g_2(z)}{E} dz, \quad f_3(z) = \int_0^z \frac{v g_1'(z)}{E} dz \quad (3.11)$$

Một công thức chung của trường chuyển vị của chòm tia cuối cùng cũng thu được bằng các phương trình. 3.6 và 3.10 như sau:

$$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + f_1(z)Q_x(x) \quad (3.12a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) - f_2(z)Q_{x,x} + f_3(z)R_x \quad (3.12b)$$

từ đó các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSBT) khác nhau được triển khai. Cần lưu ý rằng biểu thức cho trong phương trình 3.12 là trường chuyển vị tổng quả của dầm dựa trên lý thuyết đàn hồi trong đó cả chuyển vị theo phương x (chuyển vị dọc trục) và chuyển vị theo phương z (chuyển vị ngang) đều xấp xỉ theo chiều dày dầm. Nếu ảnh hưởng của biến dạng theo phương z bị bỏ qua thì $w(x, z) = w_0(x)$, phương trình 3.12 trở thành:

$$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + f_1(z)Q_x(x) \quad (3.13a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (3.13b)$$

Ví dụ 1: Các tính chất vật liệu được cho là không đổi trong dầm, lực cắt ngang được giả sử được biểu thị như sau ([67]):

$$Q_x(x) = \frac{5Gh}{6}(\theta_x + w_{0,x}) \quad (3.14)$$

Trong đó θ_x là góc xoay tại chính giữa dầm. Phương trình 3.13 dẫn đến một công thức chung mới của HSBT như sau:

$$u(x, z) = u_0(x) + \left(\frac{5hg_2}{6} - z \right) w_{0,x} + \frac{5hg_2}{6} \theta_x(x) \quad (3.15a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (3.15b)$$

Trong đó nó vẫn giữ được ba ẩn số u_0, w_0, θ_x và hàm biến dạng cắt bậc cao $g_2(z)$ được định nghĩa trong phương trình. 3,9b. Cần lưu ý rằng độ chính xác của lý thuyết hoàn toàn phụ thuộc vào sự lựa chọn của hàm hình dạng. Ví dụ: lấy

hàm hình dạng do Reissner đề xuất [67]: $g_1(z) = \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)$,

$g_2(z) = \frac{3}{2h} \left(z - \frac{4z^3}{3h^2} \right)$ đưa vào phương trình 3.15a, ta được:

$$u(x, z) = u_0(x) + \left(\frac{z}{4} - \frac{5z^3}{3h^2} \right) w_{0,x} + \left(\frac{5z}{4} - \frac{5z^3}{3h^2} \right) \theta_x(x) \quad (3.16a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (3.16b)$$

Khi hàm biến dạng cắt bậc cao do Reissner [67] và Shi [68] đề xuất để phân tích cho tấm. Các kết quả số trước đó dựa trên các phương trình. 3.16 cho các tấm cho thấy độ chính xác và hiệu quả của nó trong việc phân tích tĩnh và động của các tấm.

Một cách tiếp cận khác được cho là lực cắt ngang được thể hiện dưới dạng:

$$Q_x(x) = G\theta_x \quad (3.17)$$

Dẫn đến một HSBT khác thường được sử dụng bởi nhiều nghiên cứu:

$$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + g_2(z)\theta_x(x); w(x, z) = w_0(x) \quad (3.18)$$

Ví dụ 2: Đối với dầm chức năng, các nghiên cứu của Nguyen và cộng sự [3, 4] trước đây với lực biến dạng cắt ngang như sau:

$$Q_x(x) = H(\theta_x + w_{0,x}) \quad (3.19)$$

trong đó độ cứng cắt cải thiện được đưa ra bởi:

$$H = \left[\int_{-h/2}^{h/2} \frac{(\bar{b}A_z + \bar{d}B_z)^2}{G} dz \right]^{-1} \quad \text{với } A_z = \int_{-h/2}^z Q_{11}(\xi) d\xi, B_z = \int_{-h/2}^z Q_{11}(\xi) d\xi \quad (3.20)$$

Và \bar{b} , \bar{d} là các thành phần của ma trận tuân thủ ([4]). Đưa phương trình 3.19 vào phương trình 3.13a sẽ đưa đến một lý thuyết HSBT như sau:

$$u(x, z) = u_0(x) + [Hf_1(z) - z] w_{0,x} + Hf_1(z) \theta_x(x) \quad (3.21a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (3.21b)$$

Ví dụ 3: Để xem xét ảnh hưởng của biến dạng ngang bình thường, dạng tổng quát của chuyển vị ngang trong phương trình. 3.12b nên được xem xét trong đó vì mục đích đơn giản, ảnh hưởng của ứng suất cắt bình thường có thể bị bỏ qua, dẫn đến:

$$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + f_1(z)Q_x(x) \quad (3.22a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) + f_3(z)R_x \quad (3.22b)$$

Đó là một hình thức chung của lý thuyết dầm tiếp cận 3 chiều (Quá-3D). Đối với lực cắt được cho trong phương trình. 3.17 và các tính chất vật liệu được cho là hằng số, một lý thuyết dầm tiếp cận 3 chiều (Quasi-3D) phổ biến được hình thành:

$$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + g_2(z)\theta_x(x) \quad (3.23a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) + \frac{\nu}{2(1+\nu)} g_1(z)w_z(x) \quad (3.23b)$$

Trong đó $w_z(x) = \int_0^x (\theta_x + w_{0,x}) dx$. Nếu thành phần $\frac{\nu}{2(1+\nu)}$ được loại bỏ, trường

chuyển vị trong phương trình 3.23 thường được sử dụng trong nhiều nghiên cứu.

$$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + g_2(z)\theta_x(x) \quad (3.24a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) + g_1(z)w_z(x) \quad (3.24b)$$

Tương tự, nếu lực cắt ngang được lấy là phương trình. 3.14, một cơ sở lý thuyết dầm tiếp cận ba chiều mới thu được như sau:

$$u(x, z) = u_0(x) + \left(\frac{5hg_2}{6} - z \right) w_{0,x} + \frac{5hg_2}{6} \theta_x(x) \quad (3.25a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) + \frac{5\nu h}{12(1+\nu)} g_1(z)w_z(x) \quad (3.25b)$$

Hơn nữa, nếu biểu thức của lực cắt ngang trong phương trình. 3.19 được xem xét cho dầm chức năng, một lý thuyết dầm tiếp cận 3 chiều mới khác có được như sau:

$$u(x, z) = u_0(x) + [Hf_1(z) - z]w_{0,x} + Hf_1(z)\theta_x(x) \quad (3.26a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) + Hf_3(z)w_z(x) \quad (3.26b)$$

Một số cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao tiêu biểu như sau;

Bảng 3.1 Các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao thống nhất 1

Tên	Trường chuyên vị
HSBT1	$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + g_2(z)\theta_x(x)$ $w(x, z) = w_0(x)$
HSBT2	$u(x, z) = u_0(x) + \left(\frac{5hg_2}{6} - z\right)w_{0,x} + \frac{5hg_2}{6}\theta_x(x)$ $w(x, z) = w_0(x)$
HSBT3	$u(x, z) = u_0(x) + [Hf_1(z) - z]w_{0,x} + Hf_1(z)\theta_x(x)$ $w(x, z) = w_0(x)$
Quasi-3D0	$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + g_2(z)\theta_x(x)$ $w(x, z) = w_0(x) + g_1(z)w_z(x)$
Quasi-3D1	$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + g_2(z)\theta_x(x)$ $w(x, z) = w_0(x) + \frac{\nu}{2(1+\nu)}g_1(z)w_z(x)$
Quasi-3D2	$u(x, z) = u_0(x) + \left(\frac{5hg_2}{6} - z\right)w_{0,x} + \frac{5hg_2}{6}\theta_x(x)$ $w(x, z) = w_0(x) + \frac{5\nu h}{12(1+\nu)}g_1(z)w_z(x)$
Quasi-3D3	$u(x, z) = u_0(x) + [Hf_1(z) - z]w_{0,x} + Hf_1(z)\theta_x(x)$ $w(x, z) = w_0(x) + Hf_3(z)w_z(x)$

Thêm vào đó, chuyển vị ngang được tách ra làm hai thành phần: Một thành phần do uốn và một thành phần do cắt, ta được: $w_0(x) = w_0^b(x) + w_0^s(x)$ và đặt $\theta_x = -w_{0,x}^s$, trường chuyển vị ở các ví dụ 1-3 được viết lại như ở bảng 3.2.

Bảng 3.2 Các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao thống nhất 2

Tên	Trường chuyển vị
RHSBT1	$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}^b z - g_2(z) w_{0,x}^s(x)$ $w(x, z) = w_0^b(x) + w_0^s(x)$
RHSBT2	$u(x, z) = u_0(x) + \left(\frac{5hg_2}{6} - z \right) w_{0,x}^b - \frac{5hg_2}{6} w_{0,x}^s(x)$ $w(x, z) = w_0^b(x) + w_0^s(x)$
RHSBT3	$u(x, z) = u_0(x) + [Hf_1(z) - z] w_{0,x}^b - Hf_1(z) w_{0,x}^s(x)$ $w(x, z) = w_0^b(x) + w_0^s(x)$
Rquasi-3D0	$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}^b z - g_2(z) w_{0,x}^s(x)$ $w(x, z) = w_0^b(x) + w_0^s(x) + g_1(z) w_z(x)$
Rquasi-3D1	$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}^b z - g_2(z) w_{0,x}^s(x)$ $w(x, z) = w_0^b(x) + w_0^s(x) + \frac{\nu}{2(1+\nu)} g_1(z) w_z(x)$
Rquasi-3D2	$u(x, z) = u_0(x) + \left(\frac{5hg_2}{6} - z \right) w_{0,x}^b - \frac{5hg_2}{6} w_{0,x}^s(x)$ $w(x, z) = w_0^b(x) + w_0^s(x) + \frac{5\nu h}{12(1+\nu)} g_1(z) w_z(x)$
Rquasi-3D3	$u(x, z) = u_0(x) + [Hf_1(z) - z] w_{0,x}^b - Hf_1(z) w_{0,x}^s(x)$ $w(x, z) = w_0^b(x) + w_0^s(x) + Hf_3(z) w_z(x)$

3.3 Phân tích tĩnh, tối hạn và dao động tự do của dầm chức năng dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao.

Triển khai các công thức cho dầm chức năng dựa trên các HSBT được đề xuất trong Bảng 3.1, chỉ có trường chuyển vị của HSBT2 được chọn để triển khai chi tiết.

3.3.1 Trường chuyển vị, biến dạng và ứng suất

Trường chuyển vị của **HSBT2** được triển khai như sau:

$$u(x, z) = u_0(x) + \bar{g}_1(z)w_{0,x} + \bar{g}_2(z)\theta_x(x), w(x, z) = w_0(x) \quad (3.27)$$

Trong đó $\bar{g}_1(z) = 5hg_2/6 - z$, $\bar{g}_2(z) = 5hg_2/6$.

Trường chuyển vị :

$$\varepsilon_x(x, z) = u_{0,x}(x) + \bar{g}_1(z)w_{0,xx} + \bar{g}_2(z)\theta_{x,x}(x) \quad (3.28a)$$

$$\gamma_{xz}(x, z) = \frac{5hg_1}{6}(\theta_x + w_{0,x}) \quad (3.28a)$$

Trong đó $g_1(z) = g_2'(z)$ với ràng buộc: $g_1(z = \pm h/2) = 0$. Quan hệ ứng suất và biến dạng như sau:

$$\sigma_x(x, z) = E\varepsilon_x(x, z) = E[u_{0,x}(x) + \bar{g}_1(z)w_{0,xx} + \bar{g}_2(z)\theta_{x,x}(x)] \quad (3.29a)$$

$$\sigma_{xz}(x, z) = G\gamma_{xz}(x, z) = \frac{5Ghg_1}{6}(\theta_x + w_{0,x}) \quad (3.29b)$$

Nó được ghi nhận từ phương trình. 3.29b rằng ứng suất cắt ngang bằng 0 tại mặt trên và mặt dưới của dầm.

3.3.2 Xây dựng phương trình năng lượng

Để rút ra các phương trình chuyển động của dầm, nguyên lý Hamilton đã được sử dụng:

$$\int_0^T \delta(U + V - K) dT = 0 \quad (3.30)$$

Trong đó U, V, K là năng lượng biến dạng, các năng lượng do ngoại lực gây nên và động năng của dầm Sự biến đổi của năng lượng biến dạng được đưa ra bởi:

$$\delta U = \int_0^L [N_x \delta u_{0,x} + M_x^b \delta w_{0,xx} + M_x^s \delta \theta_{x,x} + Q_x (\delta \theta_x + \delta w_{0,x})] dx \quad (3.31)$$

Trong đó N_x, M_x^b, M_x^s là các giá trị của ứng suất.

$$(N_x, M_x^b, M_x^s) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(1, \bar{g}_1, \bar{g}_2) b dz, Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{5hg_1(z)}{6} \sigma_{xz} b dz \quad (3.32)$$

các giá trị của ứng suất có thể được viết dưới dạng rõ ràng như sau:

$$N_x = Au_{0,x} + Bw_{0,xx} + B^s \theta_{x,x} \quad (3.33a)$$

$$M_x^b = Bu_{0,x} + Dw_{0,xx} + D^s \theta_{x,x} \quad (3.33b)$$

$$M_x^s = B^s u_{0,x} + D^s w_{0,xx} + H^s \theta_{x,x} \quad (3.33c)$$

$$Q_x = A^s (\theta_x + w_{0,x}) \quad (3.33d)$$

Trong đó $A, B, D, B^s, D^s, H^s, A^s$ là các thành phần của ma trận độ cứng được viết như sau:

$$(A, B, B^s, D, D^s, H^s) = \int_{-h/2}^{h/2} E(z) (1, \bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_1^2, \bar{g}_1 \bar{g}_2, \bar{g}_2^2) b dz \quad (3.34a)$$

$$A^s = \int_{-h/2}^{h/2} G \left(\frac{5hg_1}{6} \right)^2 b dz \quad (3.34b)$$

Các giá trị bên ngoài bao gồm thành phần lực theo phương z là q và thành phần ngoại lực theo phương x là N_x^0 thể hiện trong công thức sau:

$$\delta V = - \int_0^L q \delta w_0 dx - \int_0^L N_x^0 w_{0,xx} \delta w_0 dx \quad (3.35)$$

Phương trình động năng được xác định như sau:

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V \rho \left[(\dot{u}_0 + \bar{g}_1 \dot{w}_{0,x} + \bar{g}_2 \dot{\theta}_x) (\delta \dot{u}_0 + \bar{g}_1 \delta \dot{w}_{0,x} + \bar{g}_2 \delta \dot{\theta}_x) + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dV \\ &= \int_0^L \left(I_0 \dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + I_1 \dot{u}_0 \delta \dot{w}_{0,x} + I_2 \dot{u}_0 \delta \dot{\theta}_x + I_1 \dot{w}_{0,x} \delta \dot{u}_0 + J_1 \dot{w}_{0,x} \delta \dot{w}_{0,x} \right. \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\left. + K_1 \dot{w}_{0,x} \delta \dot{\theta}_x + I_2 \dot{\theta}_x \delta \dot{u}_0 + K_1 \dot{\theta}_x \delta \dot{w}_{0,x} + J_2 \dot{\theta}_x \delta \dot{\theta}_x + I_0 \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right) dx$$

Trong đó các giá trị $I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_1$ được tính như sau:

$$(I_0, I_1, I_2, J_1, K_1, J_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho (1, \bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_1^2, \bar{g}_1 \bar{g}_2, \bar{g}_2^2) b dz \quad (3.37)$$

Đưa các phương trình 3.31, 3.32 và 3.34 vào phương trình 3.30, và tích phân từng phần ta được các phương trình cân bằng sau:

$$\delta u_0 : N_{x,x} = I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{w}_{0,x} + I_2 \ddot{\theta}_x \quad (3.38a)$$

$$\delta w_0 : M_{x,xx}^b - Q_{x,x} - q - N_x^0 w_{0,xx} = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \ddot{w}_{0,x} + J_1 \ddot{w}_{0,xx} + K_1 \ddot{\theta}_{x,x} \quad (3.38b)$$

$$\delta \theta_x : M_{x,x}^s - Q_x = I_2 \ddot{u}_0 + K_1 \ddot{w}_{0,x} + J_2 \ddot{\theta}_x \quad (3.38c)$$

Đưa phương trình 3.33 vào phương trình 3.38 ta được:

$$Au_{0,xx} + Bw_{0,xxx} + B^s \theta_{x,xx} = I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{w}_{0,x} + I_2 \ddot{\theta}_x \quad (3.39a)$$

$$\begin{aligned} Bu_{0,xxx} + Dw_{0,xxxx} + D^s \theta_{x,xxx} - A^s (\theta_{x,x} + w_{0,xx}) - q - N_x^0 w_{0,xx} \\ = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \ddot{w}_{0,x} + J_1 \ddot{w}_{0,xx} + K_1 \ddot{\theta}_{x,x} \end{aligned} \quad (3.39b)$$

$$B^s u_{0,xx} + D^s w_{0,xxx} + H^s \theta_{x,xx} - A^s (\theta_x + w_{0,x}) = I_2 \ddot{u}_0 + K_1 \ddot{w}_{0,x} + J_2 \ddot{\theta}_x \quad (3.39c)$$

Phương trình 3.39 là phương trình động lượng tổng thể của dầm từ phương trình này có thể phân tích cho các bài toán uốn, lực tới hạn, dao động tự do ...

3.3.3 Lời giải Navier

Lời giải Navier được sử dụng phân tích cho dầm tựa đơn. Lời giải Navier có dạng:

$$u_0(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m \cos \lambda x e^{i\omega t}, w_0(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \lambda x e^{i\omega t}, \theta_x(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \cos \lambda x e^{i\omega t} \quad (3.40)$$

Lực cắt $q(x)$ được thể hiện như sau:

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \lambda x \quad (3.41)$$

Giả sử rằng dầm chịu tải trọng nén trong mặt phẳng $N_{xx}^0 = -N^0$. Đưa phương trình 3.40 và 3.41 vào phương trình 3.39, phương trình đặc trưng thu được:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{q}_m \quad (3.42)$$

3.4 Phân tích ứng xử của dầm chức năng dựa trên lý thuyết tiếp cận 3 chiều (Quasi-3D)

Để hình thành cơ sở phân tích cho dầm chức năng dựa trên lý thuyết tiếp cận ba chiều được đề xuất trong Bảng 3.1, chỉ có trường chuyển vị tiếp cận 3 chiều loại 2 (**Quasi-3D2**) được lựa chọn để phân tích.

3.4.1 Trường chuyển vị, biến dạng và ứng suất

Trường chuyển vị của lý thuyết tiếp cận ba chiều (**Quasi-3D2**) như sau:

$$u(x,z) = u_0(x) + \bar{g}_1(z) w_{0,x} + \bar{g}_2(z) \theta_x(x) \quad (3.43a)$$

$$w(x,z) = w_0(x) + \frac{5\nu h}{12(1+\nu)} g_1(z) w_z(x) \quad (3.43b)$$

Trường chuyển vị được suy ra từ trường biến dạng ở công thức 3.43 được thể hiện bởi:

$$\varepsilon_x(x,z) = u_{0,x}(x) + \bar{g}_1(z) w_{0,xx} + \bar{g}_2(z) \theta_{x,x}(x) \quad (3.44a)$$

$$\varepsilon_z(x,z) = \frac{5\nu h}{12(1+\nu)} g_1(z) w_z(x) \quad (3.44b)$$

$$\gamma_{xz}(x,z) = \frac{5hg_1}{6} [\theta_x + w_{0,x} + Gw_{z,x}] \quad (3.44c)$$

Các phương trình cấu thành do đó thu được như sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{13} & 0 \\ Q_{13} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

Các phương trình 3.44c và 3.45 cho thấy ứng suất cắt ngang thỏa mãn bằng 0 bề mặt trên và dưới của dầm.

3.3.4 Xây dựng phương trình năng lượng

Để rút ra các phương trình chuyển động của dầm, nguyên lý Hamilton đã được sử dụng:

$$\int_0^T \delta(U + V - K) dT = 0 \quad (3.46)$$

Trong đó U, V, K là năng lượng biến dạng, năng lượng do ngoại lực gây nên và động năng của dầm. Sự biến đổi của năng lượng biến dạng được xác định:

$$\delta U = \int_0^L \left[N_x \delta u_{0,x} + M_x^b \delta w_{0,xx} + M_x^s \delta \theta_{x,x} + R_z \delta w_z + Q_x (\delta \theta_x + \delta w_{0,x} + \delta w_{z,x}) \right] dx \quad (3.47)$$

Trong đó N_x, M_x^b, M_x^s, R_z và Q_x là các giá trị của ứng suất được xác định:

$$\left(N_x, M_x^b, M_x^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x (1, \bar{g}_1, \bar{g}_2) b dz \quad (3.48a)$$

$$R_z = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{5\nu h}{12(1+\nu)} g_1^i(z) \sigma_z b dz \quad (3.48b)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{5h g_1(z)}{6} \sigma_{xz} b dz \quad (3.48c)$$

các giá trị của ứng suất có thể được viết dưới dạng rõ ràng như sau:

$$N_x = A u_{0,x} + B w_{0,xx} + B^s \theta_{x,x} + X w_z \quad (3.49a)$$

$$M_x^b = B u_{0,x} + D w_{0,xx} + D^s \theta_{x,x} + Y w_z \quad (3.49b)$$

$$M_x^s = B^s u_{0,x} + D^s w_{0,xx} + H^s \theta_{x,x} + X^s w_z \quad (3.49c)$$

$$R_z = X u_{0,x} + Y w_{0,xx} + X^s \theta_{x,x} + Y^s w_z \quad (3.49d)$$

$$Q_x = A^s (w_{0,x} + \theta_x + w_{z,x}) \quad (3.49e)$$

Năng lượng do các ngoại lực được xác định như sau:

$$\delta V = - \int_0^L q \delta w_0 dx - \int_0^L N_x^0 w_{0,xx} \delta w_0 dx \quad (3.51)$$

Phương trình động năng được xác định như sau:

$$\begin{aligned}
\delta K = \int_0^L & \left(I_0 \dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + I_1 \dot{u}_0 \delta \dot{w}_{0,x} + I_2 \dot{u}_0 \delta \dot{\theta}_x + I_1 \dot{w}_{0,x} \delta \dot{u}_0 + J_1 \dot{w}_{0,x} \delta \dot{w}_{0,x} \right. \\
& + K_1 \dot{w}_{0,x} \delta \dot{\theta}_x + I_2 \dot{\theta}_x \delta \dot{u}_0 + K_1 \dot{\theta}_x \delta \dot{w}_{0,x} + J_2 \dot{\theta}_x \delta \dot{\theta}_x + I_0 \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \\
& \left. + L_1 \dot{w}_0 \delta \dot{w}_z + L_1 \dot{w}_z \delta \dot{w}_0 + L_2 \dot{w}_z \delta \dot{w}_z \right) dx
\end{aligned} \quad (3.52)$$

Đưa các phương trình 3.47, 3.51 và 3.52 vào phương trình 3.46, và tích phân từng phần ta được các phương trình cân bằng sau:

$$\delta u_0 : N_{x,x} = I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{w}_{0,x} + I_2 \ddot{\theta}_x \quad (3.53a)$$

$$\begin{aligned}
\delta w_0 : M_{x,xx}^b - Q_{x,x} - q - N_x^0 w_{0,xx} \\
= I_1 \ddot{u}_{0,x} + J_1 \ddot{w}_{0,xx} + I_0 \ddot{w}_0 + K_1 \ddot{\theta}_{x,x} + L_1 \dot{w}_z
\end{aligned} \quad (3.53b)$$

$$\delta \theta_x : M_{x,x}^s - Q_x = I_2 \ddot{u}_0 + K_1 \ddot{w}_{0,x} + J_2 \ddot{\theta}_x \quad (3.53c)$$

$$\delta w_z : R_z - Q_x = L_1 \dot{w}_0 + L_2 \dot{w}_z \quad (3.53d)$$

Đưa phương trình. 3.49 vào 3.53 ta được:

$$A u_{0,xx} + B w_{0,xxx} + B^s \theta_{x,xx} + X w_{z,x} = I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{w}_{0,x} + I_2 \ddot{\theta}_x \quad (3.54a)$$

$$\begin{aligned}
B u_{0,xxx} + D w_{0,xxx} + D^s \theta_{x,xxx} + Y w_{z,xx} - A^s (w_{0,xx} + \theta_{x,x} + w_{z,xx}) \\
- q - N_x^0 w_{0,xx} = I_1 \ddot{u}_{0,x} + J_1 \ddot{w}_{0,xx} + I_0 \ddot{w}_0 + K_1 \ddot{\theta}_{x,x} + L_1 \dot{w}_z
\end{aligned} \quad (3.54b)$$

$$\begin{aligned}
B^s u_{0,xx} + D^s w_{0,xxx} + H^s \theta_{x,xx} + X^s w_{z,x} - A^s (w_{0,x} + \theta_x + w_{z,x}) \\
= I_2 \ddot{u}_0 + K_1 \ddot{w}_{0,x} + J_2 \ddot{\theta}_x
\end{aligned} \quad (3.54c)$$

$$X u_{0,x} + Y w_{0,xx} + X^s \theta_{x,x} + Y^s w_z - A^s (w_{0,x} + \theta_x + w_{z,x}) = L_1 \dot{w}_0 + L_2 \dot{w}_z \quad (3.54d)$$

Phương trình 3.54 là phương trình động lượng tổng thể của dầm từ phương trình này có thể phân tích cho các bài toán uốn, lực tới hạn, dao động tự do ...

3.3.5 Lời giải Navier

Lời giải Navier được sử dụng phân tích cho dầm tựa đơn. Lời giải Navier có dạng:

$$u_0(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m \cos \lambda x e^{i\omega t}, w_0(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \lambda x e^{i\omega t}, \theta_x(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \cos \lambda x e^{i\omega t} \quad (3.55)$$

Lực cắt $q(x)$ được thể hiện như sau:

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \lambda x \quad (3.56)$$

Giả sử rằng dầm chịu tải trọng nén trong mặt phẳng $N_{xx}^0 = -N^0$. Đưa các phương trình 3.55 và 3.56 vào 3.54, phương trình đặc trưng thu được:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{q}_m \quad (3.57)$$

3.5 Cấu tạo hình học và quy luật phân bố vật liệu cho dầm chức năng

Cấu tạo hình học và quy luật phân bố vật liệu cho dầm chức năng đã được trình bày ở phần trước và thể hiện ở hình 2.6 để sử dụng phân tích cho dầm chức năng. Dầm chức năng được chia ra làm 3 loại để phân tích (Loại A, B và C). Vật liệu gồm sử dụng là (Al_2O_3) và kim loại là (Al) . sự phân bố vật liệu của dầm phân lớp chức năng theo chiều dày dầm đã được trình bày ở phần nội dung 2.21.

3.6 Lời giải giải tích

3.6.1 Lời giải Ritz 1

In order to derive the equations of motion, the solution field u, w, θ_x and w_z is approximated as the following forms:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^m u_j \psi_j(x) e^{i\omega t}, w(x, t) = \sum_{j=1}^m w_j \varphi_j(x) e^{i\omega t} \quad (3.58)$$

$$\theta(x, t) = \sum_{j=1}^m \theta_j \psi_j(x) e^{i\omega t}, w_z(x, t) = \sum_{j=1}^m w_{zj} \varphi_j(x) e^{i\omega t}$$

Trong đó: Hàm dạng $\psi_j(x)$ và $\varphi_j(x)$ được lựa chọn như sau:

$$\psi(x) = x^{j-1}, \varphi(x) = x^{j-1} \quad (3.59)$$

Để áp đặt các điều kiện biên khác nhau, phương pháp nhân tử Lagrange có thể được sử dụng để hàm Lagrangian được viết lại như sau:

$$\Pi^* = \Pi + \beta_i \hat{u}_i(\bar{x}) \quad (3.60)$$

Trong đó β_i là các tham số Lagrange để giải quyết cho các điều kiện biên khác nhau tại $\bar{x} = 0, L$. Đưa phương trình 3.60 vào phương trình động lượng, và sử dụng phương trình Lagrange:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (3.61)$$

Với q_j là các giá trị $(u_j, w_j, \theta_j, w_{zj}, \beta_j)$ ta được:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (3.62)$$

3.6.2 Lời giải Ritz 2

Dựa trên lời giải Ritz 2, trường chuyển vị được xấp xỉ như sau:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^m \psi_j(x) u_j e^{i\omega t}, w_b(x, t) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) w_{bj} e^{i\omega t}, w_s(x, t) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) w_{sj} e^{i\omega t} \quad (3.63)$$

Trong đó ω là tần số dao động, $i^2 = -1$ là đơn vị ảo; u_j, w_{bj} , và w_{sj} là các ẩn số chưa biết; $\psi_j(x)$ và $\varphi_j(x)$ là các hàm dạng giống với phương trình 3.59. Để áp đặt các điều kiện biên khác nhau, phương pháp nhân tử Lagrange có thể được sử dụng sao cho hàm Lagrangian của bài toán là các phương trình. 3.61.

Đưa phương trình 3.63 vào phương trình động lượng và sử dụng hàm Lagrange ở phương trình 3.54, ta được:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (3.64)$$

3.7 Kết quả tính toán số

Một số ví dụ số được đưa ra để phân tích trong chương này về giá trị dao động tự do, giá trị ứng suất, giá trị lực tới hạn của dầm phân lớp chức năng tựa đơn.

Các tính chất của vật liệu kim loại Aluminum (Al) là $E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$,

$\rho = 2707 \text{ kg/m}^3$ và vật liệu kim loại Alumina (Al_2O_3) là $E = 380 \text{ GPa}$,

$\nu = 0.3$, $\rho = 3960 \text{ kg/m}^3$

Ba loại dầm chức năng (loại A, B và C) được cấu thành bởi vật liệu gốm đẳng hướng (Al_2O_3) vật liệu kim loại (Al).

Để thuận tiện cho phân tích, các công thức không thứ nguyên sau được sử dụng:

$$\bar{w} = \frac{wh^3}{12} \frac{384E_m}{5q_0L^4}, \bar{\sigma}_{xx}(z) = \sigma_{xx}\left(\frac{L}{2}, z\right) \frac{h}{q_0L}, \bar{\sigma}_{xz}(z) = \sigma_{xz}(0, z) \frac{h}{q_0L} \quad (3.65)$$

$$\bar{N}_{cr} = N_{cr} \frac{12L^2}{E_m h^3}, \bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$

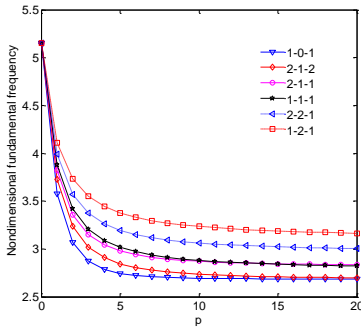
Ví dụ 1: Phân tích dao động tự do và lực tới hạn của dầm chức năng theo các lý thuyết RHSBT1, HSBT2 và quasi-3D2 (Loại A)

Để xác minh cơ sở lý thuyết của Mục 3.2, chúng tôi đã mô hình hóa và xuất các kết quả số cho dầm chức năng. Bảng 3.5 được đưa ra sự so sánh về giá trị tần số dao động cơ bản không thứ nguyên của dầm chức năng ($\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$) với điều kiện biên tựa đơn (Loại A), vật liệu thay đổi theo theo hàm mũ với hệ số mũ p thay đổi, hai tỉ lệ giữa chiều dài và chiều cao dầm được đưa ra để phân tích ($L/h=5$ và 20) và kết quả được so sánh với HSBT [5] và (TSBT) [69].

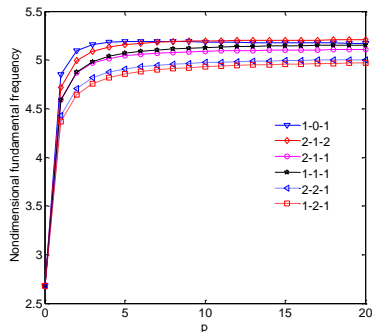
Bảng 3.3 Giá trị tần số dao động không thứ nguyên ($\bar{\omega}$) của dầm chức năng với điều kiện biên tựa đơn (Loại A).

L/h	Lý thuyết	p					
		0	0.5	1	2	5	10
5	HSBT1 [5]	5.1528	4.4102	3.9904	3.6264	3.4011	3.2816
	TSBT [69]	5.1527	4.4107	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816
	RHSBT1	5.3924	4.5900	4.1462	3.7777	3.5933	3.4907
	HSBT2	5.1527	4.4088	3.9904	3.6264	3.4012	3.2817
	Quasi-3D2	4.4870	3.7518	3.4345	3.2383	3.1657	3.0680
	20	HSBT[5]	5.4603	4.6506	4.2051	3.8361	3.6485
TSBT [69]		5.4603	4.6511	4.2051	3.8361	3.6485	3.5390
HSBT2		5.4603	4.6492	4.2050	3.8361	3.6485	3.5391
RHSBT1		5.4659	4.6547	4.2087	3.8397	3.6533	3.5442
Quasi-3D2		3.5424	2.9693	2.7368	2.5891	2.4650	2.3598

Ví dụ 2: Phân tích uốn, lực tới hạn và tần số dao động cho dầm chức năng sử dụng lý thuyết RHSBT1 (Loại B)

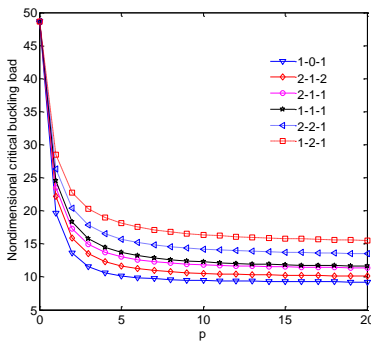


(a) Lỗi cứng

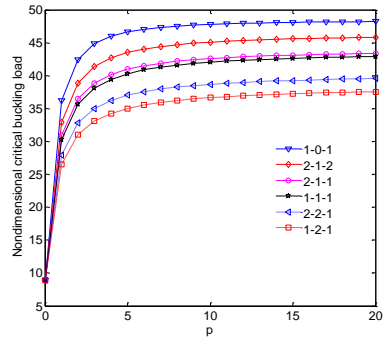


(b) Lỗi mềm

Hình 3.1 Giá trị tần số dao động không thứ nguyên ($\bar{\omega}$, Loại B, $L/h=5$) khi hằng số vật liệu thay đổi.



(a) Lỗi cứng

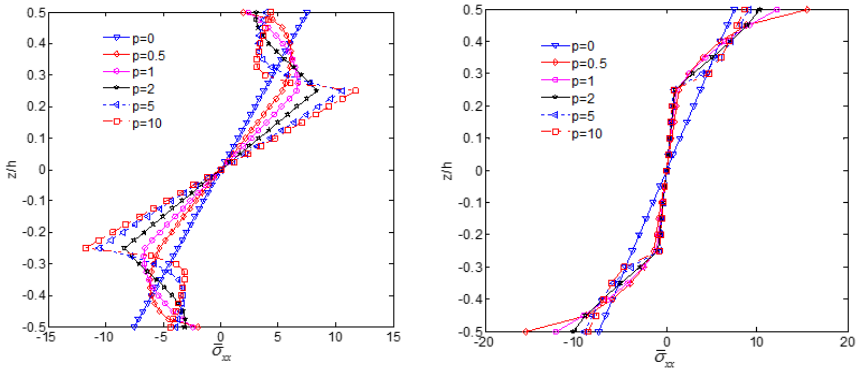


(b) Lỗi mềm

Hình 3.2 Giá trị lực tới hạn không thứ nguyên (\bar{N}_{cr} , Loại B, $L/h=5$) khi hằng số vật liệu thay đổi.

Ở hình 3.1 và 3.2 có thể được giải thích bởi thực tế là giá trị hằng số vật liệu p càng lớn tương ứng với thành phần kim loại nhiều hơn, và do đó làm cho dầm sandwich chức năng trở nên mềm hơn. Từ các số liệu này có thể nhận thấy rằng các giá trị thấp nhất và cao nhất của giá trị tần số dao động và giá trị tải trọng tới

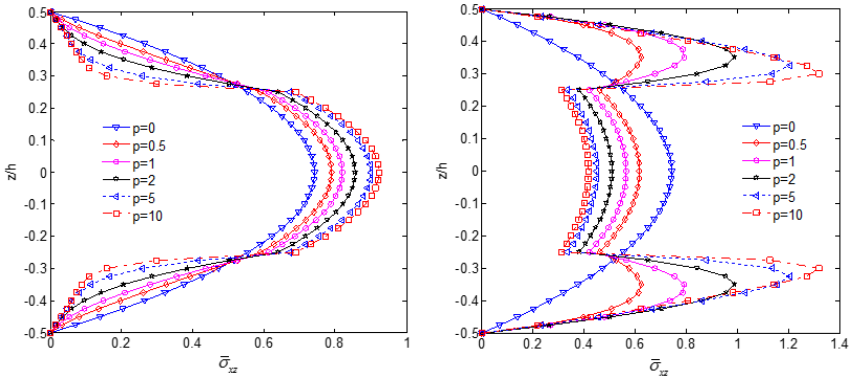
hạn tương ứng với dầm sandwich chức năng (1-0-1) và (1-2-1) với lớp lõi cứng đồng nhất và ngược lại khi có lớp lõi mềm đồng nhất.



(a) Lõi cứng

(b) Lõi mềm

Hình 3.3 Giá trị ứng suất pháp $\bar{\sigma}_{xx}$ theo chiều cao có tỉ lệ các lớp (1-2-1) của dầm sandwich chức năng (Loại B, $L/h=10$).

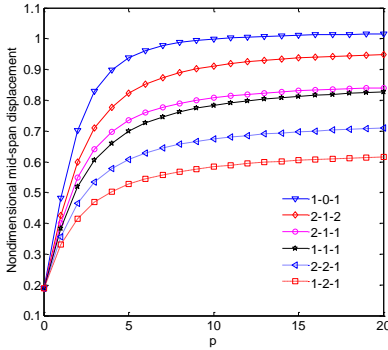


(a) Lõi cứng

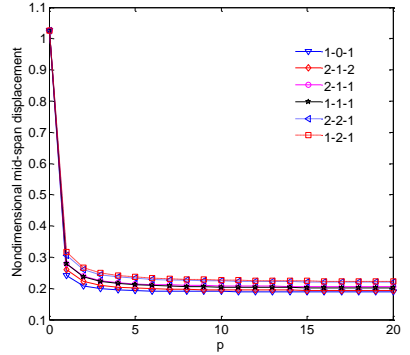
(b) Lõi mềm

Hình 3.4 Giá trị ứng suất cắt $\bar{\sigma}_{xc}$ theo chiều cao có tỉ lệ các lớp (1-2-1) của dầm sandwich chức năng (Loại B, $L/h=10$).

Hình 3.3a chỉ ra rằng giá trị ứng suất pháp của dầm sandwich chức năng sẽ thay đổi như sau: nó có hình dạng tuyến tính ở lớp lõi cứng đồng nhất $p=0$ và nó có hình dạng phi tuyến ở các lớp mặt khi $p>0$. Các ứng suất kéo nén có giá trị lớn nhất tại nơi tiếp giáp giữa lớp mặt và lớp lõi khi $p>0$. Hình 3.3b cho thấy rằng giá trị ứng suất màng là lớn nhất và có xu hướng giảm khi giá trị hằng số vật liệu



(a) Lõi cứng



(b) Lõi mềm

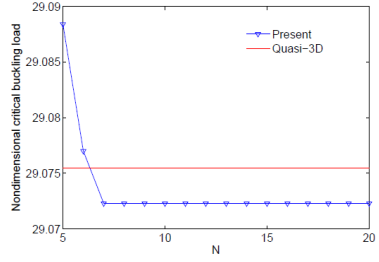
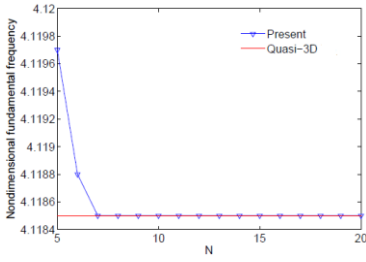
Hình 3.5 Giá trị của chuyển vị thẳng (\bar{w}) theo phương z tại giữa dầm sandwich chức năng (Loại B, $L/h=10$).

tăng lên. Hình 3.4 biểu diễn sự thay đổi của ứng suất cắt theo chiều dày dầm sandwich chức năng có tỉ lệ các lớp 1-2-1 khi hằng số vật liệu thay đổi. Rõ ràng, đối với lớp lõi cứng thì ứng suất cắt đạt giá trị lớn nhất tại vị trí chính giữa dầm, trong khi đó lớp lõi mềm đồng nhất thì ứng suất cắt lớn nhất nằm ở lớp mặt. Các kết quả ở hình 3.5 dễ dàng cho thấy khi tăng giá trị hằng số vật liệu p thì các chuyển vị sẽ tăng lên với trường hợp là lớp lõi cứng đồng nhất và chuyển vị sẽ giảm khi lớp lõi mềm đồng nhất.

Ví dụ 3: Phân tích lực tới hạn và tần số dao động riêng của lý thuyết tiếp cận 3 chiều (Quasi-3D0) dầm chức năng (Loại B, C)

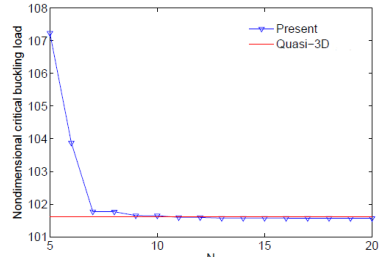
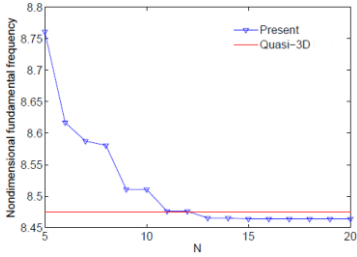
Đầu tiên, khảo sát sự hội tụ của các kết quả số cho dầm sandwich chức năng (Loại B, 1-2-1) với $L/h=5$ và hằng số vật liệu $p=1$ được khảo sát. Sự khảo sát này cho các giá trị tần số dao động và giá trị lực tới hạn cho 3 điều kiện biên khác nhau. Kết quả của luận án được so sánh với nghiên cứu [70] ở hình 3.6. ở dầm tựa đơn giá trị hội tụ nhanh hơn so dầm chịu hai đầu ngàm, và lựa chọn giá trị lặp $N=14$ làm giá trị lặp cho các lần tính tiếp theo vì các kết quả số có độ chính xác và tin tưởng.

Thêm vào đó, ảnh hưởng của tỉ lệ L/h và $p=5$ đến giá trị tần số dao động và giá trị lực tới hạn cho dầm chức năng tựa đơn cũng được thể hiện ở hình 3.7.



Tựa đơn

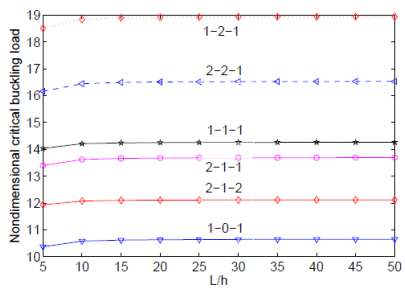
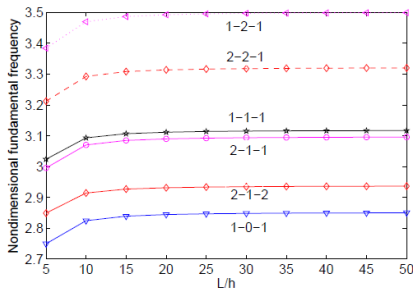
Tựa đơn



Ngàm-Ngàm

Ngàm-Ngàm

Hình 3.6 Sự hội tụ của giá trị tần số dao động riêng ($\bar{\omega}$) và Lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của dầm sandwich chức năng (Loại B, $p = 1$, $L/h = 5$).



Hình 3.7 Ảnh hưởng tỉ lệ L/h đến giá trị tần số dao động riêng ($\bar{\omega}$) và giá trị lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của dầm sandwich chức năng (Loại B, $p = 5$).

3.8 Kết luận

Chương này đã đề xuất một cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao mới cho phân tích các giá trị tần số dao động riêng, tĩnh và lực tới hạn của dầm chức năng và dầm sandwich chức năng. Các phương trình chuyển động được lấy theo nguyên lý Hamilton và hàm Lagrangian cho dầm sandwich chức năng với lõi cứng và lõi mềm đồng nhất. Lời giải Navier và lời giải Ritz được phát triển để giải quyết vấn đề. Kết quả bằng số thu được để nghiên cứu ảnh hưởng của ảnh hưởng do hệ số đặc trưng vật liệu, tỷ lệ giữa chiều dài và chiều cao của dầm đối với độ võng, ứng suất, lực tới hạn và tần số tự nhiên. Mô hình hiện tại là phù hợp và hiệu quả trong việc phân tích tĩnh, tần số dao động riêng và lực tới hạn của dầm chức năng và dầm sandwich chức năng.

Chương 4 Phân tích ứng xử của dầm chức năng chịu tải trọng cơ thủy nhiệt

4.1 Giới thiệu

Mục tiêu của chương này là trình bày các ảnh hưởng nhiệt độ và độ ẩm lên dầm chức năng sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Dầm chức năng được cấu tạo từ hỗn hợp gốm và kim loại, và các tính chất vật liệu được thay đổi hệ số đặc trưng vật liệu p . Lời giải Ritz mới được đề xuất cho các điều kiện biên khác nhau để xác minh tính chính xác của lý thuyết hiện tại và nghiên cứu ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu p , tỷ lệ L/h , nhiệt độ và độ ẩm đối với các giá trị lực tới hạn do nhiệt và giá trị tần số dao động riêng của dầm chức năng chịu tải trọng cơ thủy nhiệt.

4.2 Cơ sở lý thuyết hàm dạng Ritz để phân tích dầm chức năng cho các điều kiện biên khác nhau

4.2.1 Tính chất vật liệu

Cấu tạo dầm chức năng như ở hình 3.1a. sự phân bố vật liệu như ở phần 2.21. Thêm vào đó, các tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ như sau [71]:

$$H=H_0(H_{-1}T^{-1}+1+H_1T+H_2T^2+H_3T^3) \quad (4.1)$$

Trong đó H_0, H_1, H_2 , và H_3 là hằng số vật liệu phụ thuộc nhiệt độ như ở bảng 4.1. trong nghiên cứu này các tính chất vật liệu được nghiên cứu cho cả hai trường hợp: Tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ và độ ẩm (TD) và tính chất vật liệu không phụ thuộc vào nhiệt độ và độ ẩm (TID). Phân bố độ ẩm và nhiệt độ theo ba dạng sau: nhiệt độ và độ ẩm phân bố đều, nhiệt độ và độ ẩm phân bố tuyến tính, nhiệt độ và độ ẩm phân bố phi tuyến tính như ở phần 2.3.

Bảng 4.1 Tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ

Tính chất vật liệu	H ₀	H ₁	H ₁	H ₂	H ₃	H tại 300 K
Al₂O₃						
E	349.55e+9	0	-3.853e-4	4.027e-7	-1.673e-10	320.24e+9
α	6.826e-6	0	1.838e-4	0	0	7.203e-6
ν	0.26	0	0	0	0	0.260
ρ	3800	0	0	0	0	3800
Si₃N₄						
E	348.43e+9	0	-3.070e-4	2.160e-7	-8.946e-11	322.27e+9
α	5.8723e-6	0	9.095e-4	0	0	7.475e-6
κ	13.723	0	-1.032e-3	5.466e-7	-7.876e-11	-
ν	0.24	0	0	0	0	0.240
ρ	2370	0	0	0	0	2370
β	0	0	0	0	0	0
SUS304						
E	201.04e+9	0	3.079e-4	-6.534e-7	0	207.79e+9
α	12.330e-6	0	8.086e-4	0	0	15.321e-6
κ	15.379	0	-1.264e-3	2.092e-6	-7.223e-10	-
ν	0.3262	0	-2.002e-4	3.797e-7	0	0.318
ρ	8166	0	0	0	0	8166
β	0.0005	0	0	0	0	0

4.2.2 Trường chuyển vị

Trường chuyển vị theo lý thuyết tiếp cận 3 chiều (Quasi-3D1)[72]:

$$u_1(x, z, t) = u(x, t) - zw_{,x} + \left[\sinh^{-1}\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{8z^3}{3\sqrt{5}h^3} \right] \theta(x, t) \quad (4.2)$$

$$u_3(x, z, t) = w(x, t) + \left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + z^2}} - \frac{8z^2}{\sqrt{5}h^3} \right) w_z(x, t)$$

Trong đó: $f_2 = f_{1,z}$;

Trường biến dạng:

$$\varepsilon_x(x, z, t) = u_{,x} - zw_{,xx} + f_1\theta_{,x}, \varepsilon_z(x, z, t) = f_{2,z}w_z, \gamma_{xz}(x, z, t) = f_2(\theta + w_{z,x}) \quad (4.3)$$

Quan hệ ứng suất và biến dạng:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{13} & 0 \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

4.2.3 Phương trình Lagrange

Năng lượng biến dạng U như sau:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [Au_{,x}^2 - 2Bu_{,x}w_{,xx} + Dw_{,xx}^2 + 2B^s u_{,x}\theta_{,x} - 2D^s w_{,xx}\theta_{,x} + H^s \theta_{,x}^2 + 2(Xu_{,x}w_z - Yw_{,xx}w_z + Y^s \theta_{,x}w_z) + A^s (\theta^2 + 2\theta w_{z,x} + w_{z,x}^2)] dx \quad (4.5)$$

Năng lượng V do ngoại lực tác động lên dầm :

$$V = -\frac{1}{2} \int_0^L (N^t + N^m)(w_{,x})^2 dx \quad (4.6)$$

Trong đó

$$N^t = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{11}(z)\alpha(z)[T(z) - T^0]bdz, N^m = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{11}(z)\beta(z)[C(z) - C^0]bdz \quad (4.7)$$

Động năng K được thể hiện bởi:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L [I_0\dot{u}^2 - 2I_1\dot{u}\dot{w}_{,x} + I_2\dot{w}_{,x}^2 + 2J_1\dot{\theta}\dot{u} - 2J_2\dot{\theta}\dot{w}_{,x} + K_2\dot{\theta}^2 + I_0\dot{w}^2 + 2L_1\dot{w}\dot{w}_z + L_2\dot{w}_z^2] dx \quad (4.8)$$

Hàm Lagrangian được sử dụng để rút ra các phương trình chuyển động:

$$\Pi = U + V - K \quad (4.9)$$

4.3 Phương pháp Ritz

Các chuyển vị u, w, θ_x và w_z được xấp xỉ ở phương trình 3.59:

4.3.1 Hàm dạng của phương pháp Ritz

Hàm dạng $\psi_j(x)$ và $\varphi_j(x)$ được sử dụng cho các điều kiện biên sau: Khớp – Khớp (H–H), Ngàm– Khớp (C–H), và Ngàm - Ngàm (C–C) như ở phương trình 3.60:

$$\psi(x) = x^{j-1}, \varphi(x) = x^{j-1}$$

Đưa phương trình 3.59 vào phương trình 4.9, và sử dụng phương trình Lagrange, ta được:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (4.10)$$

Với q_j thể hiện các giá trị $(u_j, w_j, \theta_j, w_{zj}, \beta_j)$, phương trình tổng quát như sau:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (4.11)$$

Bảng 4.2 Các điều kiện biên của dầm.

ĐKB	$x=0$	$x=L$
H – H	$u = 0, w = 0, w_z = 0$	$u = 0, w = 0, w_z = 0$
C – H	$u = 0, w = 0, w_{,x} = 0, \theta = 0, w_z = 0$	$u = 0, w = 0, w_z = 0$
C – C	$u = 0, w = 0, w_{,x} = 0, \theta = 0, w_z = 0$	$u = 0, w = 0, w_{,x} = 0, \theta = 0, w_z = 0$

4.3.2 Hàm dạng Hybrid mới

Trong phần này, hàm dạng Hybrid mới $\psi_j(x), \varphi_j(x)$ được đề xuất cho các điều kiện biên khác nhau như ở **bảng 4.3**

Bảng 4.3 Hàm dạng Hybrid mới.

ĐKB	$\psi_j(x) / e^{-jx/L}$	$\varphi_j(x) / e^{-jx/L}$
S – S	$\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$
H – H	$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$
C – S	$\sin\left(\frac{\pi}{2L}x\right)$	$\sin^2\left(\frac{\pi}{2L}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right)$
C – H	$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$	$\sin^2\left(\frac{\pi}{2L}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right)$
C – F	$\sin\left(\frac{\pi}{2L}x\right)$	$\sin^2\left(\frac{\pi}{2L}x\right)$
C – C	$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$	$\sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)$

4.4 Phân tích các kết quả số

Các giá trị được phân tích như sau:

$$\bar{\omega} = \omega \frac{L^2}{h} \sqrt{\int_{-h/2}^{h/2} \frac{I_0}{E(z)} dz}, \hat{\omega} = \omega \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho_c}{E_c}}, \lambda = \Delta T_{cr} \left(\frac{L}{h} \right)^2 \alpha_m, \quad (4.12)$$

Dầm chức năng chịu khi chịu nhiệt độ phân bố đều được phân tích ứng xử đầu tiên cho phần nghiên cứu này. Bảng 4.3 trình bày giá trị nhiệt tới hạn của dầm $\text{Si}_3\text{N}_4 / \text{SUS304}$ cho cả hai trường hợp tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ (TD) và khi tính chất vật liệu không phụ thuộc vào nhiệt độ (TID) với các hằng số vật liệu khác nhau p . Cần chú ý thêm rằng các kết quả tính toán ở công thức 4.12 của luận án với $\bar{Q}_{11} = E(z)/(1-\nu)$. Các kết quả nghiên cứu được so sánh với các nghiên cứu uy tín trước như Wattanasakulpong et al. [73] và Trinh [74]. Kết quả nghiên cứu khi bỏ qua biến dạng theo phương z ($\varepsilon_{zz} = 0$) thì các kết quả trùng khớp với các nghiên cứu trước.

Bảng 4.4 Giá trị lực tới hạn do nhiệt (λ) dầm chức năng ($\text{Si}_3\text{N}_4 / \text{SUS304}$) chịu ảnh hưởng của nhiệt độ phân bố đều (UTR, $L/h = 20$).

		ĐKB	Lý thuyết	p				
				0	0.5	1	5	
TD	Tựa đơn		HSBT	1.309	0.970	0.878	0.752	
			Quasi-3D	1.210	0.897	0.811	0.695	
			HSBT[74]	1.307	–	0.866	0.744	
			HSBT [73]	1.348	–	0.876	0.750	
			Ngàm-Ngàm	HSBT	5.133	3.780	3.399	2.918
		Quasi-3D	4.781	3.522	3.169	2.720		
		HSBT[74]	5.130	–	3.398	2.917		
TID	Tựa đơn		HSBT	1.151	0.882	0.806	0.698	
			Quasi-3D	1.071	0.820	0.748	0.648	
			HSBT[74]	1.151	–	0.796	0.693	
			HSBT [73]	1.185	–	0.805	0.697	
			Ngàm-Ngàm	HSBT	3.553	2.831	2.606	2.332
				Quasi-3D	3.336	2.663	2.456	2.190
				HSBT[74]	3.559	–	2.609	2.333

Bảng 4.5 Giá trị lực tới hạn do nhiệt (λ) dầm chức năng chịu ảnh hưởng của nhiệt độ phân bố tuyến tính và phi tuyến theo quy luật Fourier (NLTR), (Loại A, $\text{Si}_3\text{N}_4 / \text{SUS304}$, $L/h = 40$, TD).

Nhiệt độ phân bố	ĐKB	Lý thuyết	p				
			0	0.5	2	5	10
Tuyến tính	Tựa đơn	HSBT ^a ($\varepsilon_{zz} = 0$)	116.4406	91.8046	75.8794	69.0474	64.8133
		HSBT ^b ($\varepsilon_{zz} = 0$)	116.4489	91.8593	75.8855	69.0538	64.8135
		FSBT[75]	127.3340	95.5739	76.4715	69.4307	–
Phi tuyến theo quy luật	Ngàm- Ngàm	HSBT ^a ($\varepsilon_{zz} = 0$)	411.7059	377.7547	337.0286	310.0925	291.3543
		HSBT ^b ($\varepsilon_{zz} = 0$)	411.5244	377.7382	336.8448	309.9130	291.1854
Fourier		FSBT[76]	412.2400	377.9600	337.0300	310.1200	291.3500

^a $\bar{Q}_{11} = E(z)$, b : Hàm hybrid mới.

Nghiên cứu tiếp theo nhằm mục đích nghiên cứu ảnh hưởng của sự gia tăng nhiệt độ ở dạng phân bố tuyến tính và phi tuyến (LTR, NLTR) đối với lực tới hạn do nhiệt và giá trị tần số dao động của dầm chức năng. Ở bảng 4.5 thể hiện các giá trị lực tới hạn do nhiệt của dầm chức năng ($\text{Si}_3\text{N}_4 / \text{SUS304}$) với $L/h = 40$ và hằng số vật liệu thay đổi. Các giá trị nghiên cứu này được so sánh với các giá trị của Esfahani [76], Ebrahimi và Salari [75] theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Dễ dàng thấy rằng các kết quả nghiên cứu của luận án tương đồng với kết quả nghiên cứu [76] khi dầm bị ngâm ở hai đầu dưới sự ảnh hưởng của nhiệt độ phân bố phi tuyến theo quy luật hình Fourier trong khi đó các giá trị lực tới hạn do nhiệt có một số sai lệch nhỏ ở một số vị trí khi hằng số vật liệu p thay đổi so với nghiên cứu [75] khi dầm tựa đơn có nhiệt độ phân bố tuyến tính. Chú ý rằng ký hiệu “a” được sử dụng để giải thích cho kết quả nghiên cứu của luận án khi bỏ qua hệ số Poisson khi đó $\bar{Q}_{11} = E(z)$, và Chỉ hiệu “b” được sử dụng để thể hiện các giá trị nghiên cứu của luận án có được khi sử dụng lời giải Ritz mới mà luận án đề xuất ở bảng 4.2 và lời giải Ritz mới này được sử dụng cho các nghiên cứu tiếp theo của luận án.

Bảng 4.6 Giá trị lực tới hạn do nhiệt (λ) dầm chức năng ($\text{Si}_3\text{N}_4 / \text{SUS304}$) chịu ảnh hưởng của nhiệt độ phân bố phi tuyến theo quy luật Fourier và quy luật hình sinusoidal (NLTR) ($L/h = 30, \text{TD}$).

Nhiệt độ phân bố	ĐKB	Lý thuyết	P			
			0	0.5	2	5
Fourier	Tựa đơn	HSBT	202.2578	173.5389	148.3615	134.2035
		HSBT ^b	202.2828	173.6457	148.3834	134.2251
		Quasi-3D	187.7199	160.0195	136.2821	123.1300
	Tựa đơn	HSBT	647.7525	630.7537	589.7918	550.4308
		HSBT ^b	647.7525	630.9784	589.7918	550.4308
		Quasi-3D	611.2257	590.8552	548.9211	510.9149
	Ngâm-Khớp	HSBT	379.9401	345.7176	306.6677	281.4281
		HSBT ^b	380.0093	345.9351	306.7295	281.4875
		Quasi-3D	355.7747	321.7415	283.7695	259.9836
Sinusoidal	Tựa đơn	HSBT	266.8324	224.9764	193.4138	178.0297
		HSBT ^b	266.8651	225.1077	193.4415	178.0572
		Quasi-3D	248.2054	208.2022	178.2136	163.6644
	Ngâm- Ngâm	HSBT	823.1910	755.8429	706.6631	687.8553
		HSBT ^b	823.1910	756.0849	706.6631	687.8553
		Quasi-3D	778.0221	710.9078	661.3097	641.8079
	Ngâm- Khớp	HSBT	491.8173	430.8636	385.4767	364.4358
		HSBT ^b	491.8957	431.0940	385.5505	364.5125
		Quasi-3D	461.5226	402.6337	358.7276	337.7749

b: Hàm hybrid mới.

Hình 4.1a đưa ra các giá trị tần số dao động khi dầm chịu tải nhiệt độ phân bố đều, phân bố tuyến tính, phân bố phi tuyến theo qui luật Fourier. Giá trị tần số

dao động giảm khi tải nhiệt tăng lên ΔT và kết quả này tương tự đối với giá trị lực do nhiệt tới hạn. Bảng 4.6 và hình 4.1b xem xét ảnh hưởng tải trọng nhiệt độ khi phân bố phi tuyến theo cả 2 quy luật Fourier và hình sin theo chiều dày dầm với các điều kiện biên khác nhau. Kết quả số cho thấy, lực tới hạn do nhiệt khi nhiệt độ phân bố theo quy luật Fourier nhỏ hơn khi nhiệt độ phân bố theo quy luật sin.

Thêm vào đó, bảng 4.6 trình bày giá trị tần số dao động của dầm chức năng $\text{Si}_3\text{N}_4 / \text{SUS304}$ với $L/h=20$, $p=0.1, 0.5$ và 1 , $\Delta T = 20$ cho hai trường hợp tải nhiệt độ phân bố tuyến tính và phân bố tuyến tính theo quy luật Fourier. các kết quả số thu được được so sánh với các nghiên cứu trước [74, 75] cho các điều kiện biên khác nhau và kết quả nghiên cứu của luận án tương đồng so với các kết quả nghiên cứu trước. Nghiên cứu cuối của chương này là phân tích ảnh hưởng của độ ẩm đến ứng xử của dầm chức năng.

Bảng 4.7 Giá trị của tần số dao động riêng ($\hat{\omega}$) dầm chức năng ($\text{Si}_3\text{N}_4 / \text{SUS304}$) chịu ảnh hưởng của nhiệt độ phân bố tuyến tính và phi tuyến (Loại A, $L/h = 20$, TD).

Phân bố nhiệt độ	ĐKB	Lý thuyết	$\Delta T(K) = 20$			
			$p=0.1$	0.5	1	
Tuyến tính	Tựa đơn	HSBT	8.7846	6.8133	5.9658	
		HSBT ^b	8.8832	6.9056	6.0551	
		Quasi-3D	8.4170	6.5248	5.7113	
		HSBT ^a	8.4391	6.5450	5.7307	
		HSBT[75]	8.4716	6.5742	5.7588	
		HSBT [74]	8.4634	6.5415	5.7114	
		Ngàm- Ngàm	HSBT	20.1188	15.6333	13.6920
	HSBT ^b		20.1797	15.6863	13.7415	
	Quasi-3D		19.4059	15.0816	13.2106	
	HSBT ^a		19.3522	15.0342	13.1654	
	HSBT[75]		19.6398	15.2580	13.3671	
	HSBT [74]		19.3371	15.0222	13.1554	
	Phi tuyến theo quy luật Fourier		Tựa đơn	HSBT	8.7865	6.8184
		HSBT ^b		8.8843	6.9104	6.0611
Quasi-3D		8.4190		6.5302	5.7178	
HSBT ^a		8.4409		6.5499	5.7366	
HSBT[75]		8.4675		6.5437	5.7124	
HSBT [74]		8.4730		6.5779	5.7632	
Ngàm- Ngàm		HSBT		20.1198	15.6360	13.6953
		HSBT ^b	20.1798	15.6885	13.7454	
		Quasi-3D	19.4070	15.0844	13.2140	
		HSBT ^a	19.3532	15.0369	13.1685	
		HSBT[75]	19.6390	15.2501	13.3558	
		HSBT [74]	19.3379	15.0244	13.1579	

^a $\hat{Q}_{11} = E(z)$, b : Hàm hybrid mới.

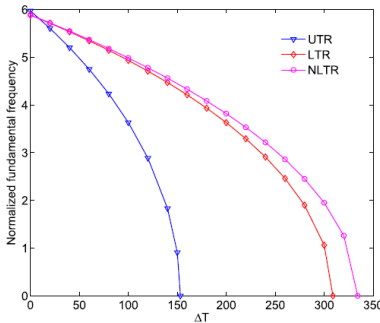
Bảng 4.7 trình bày các giá trị tần số dao động của dầm chức năng $\text{Si}_3\text{N}_4 / \text{SUS304}$ khi chịu tải trọng bởi nhiệt độ và độ ẩm phân bố phi tuyến theo

quy luật hình sin. Các kết quả tính toán khi hằng số phân bố vật liệu là $p = 0.2, 1$ và 5 , $\Delta T = 0$ và 40 , $\Delta C = 0\%$, 1% và 2% . Các kết quả tính toán được so sánh với Ebrahimi and Barati [77] cho dầm chức năng tựa đơn. Thêm vào đó, các kết quả nghiên cứu cũng được xét đến khi bỏ qua hệ số Poisson và được so sánh với nghiên cứu [77] khi nhiệt độ và độ ẩm thay đổi. Với ảnh hưởng của biến dạng thẳng theo phương x thì giá trị dao động riêng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao sẽ lớn hơn so với giá trị tần số dao động riêng khi sử dụng lý thuyết biến dạng cắt tiếp cận 3 chiều.

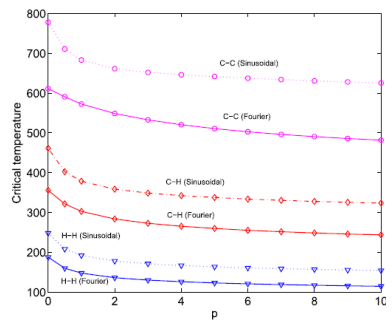
4.5 Kết luận

Ứng xử của dầm chức năng khi chịu tải trọng nhiệt ẩm đã được nghiên cứu. Các kết quả nghiên cứu dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Dầm chức năng chịu tải trọng do nhiệt độ và độ ẩm gây ra với các trường hợp sau: tải trọng phân bố đều, tải trọng phân bố tuyến tính, và tải trọng phân bố phi tuyến theo chiều dày dầm. Phương trình Lagrange được áp dụng để rút ra được phương trình động học đặc trưng và một lời giải Ritz mới được phát triển để giải quyết cho các điều kiện biên khác nhau. Lời giải Ritz được đề xuất này cho kết quả hội tụ nhanh và các kết quả số khác tương đương với các nghiên cứu trước đó. Các kết quả số thu được cho thấy:

Giá trị nhiệt độ tới hạn và giá trị của tần số dao động theo lý thuyết tiếp cận 3 chiều (Quá 3D), khi kể đến biến dạng theo phương z , thì cho kết quả nhỏ hơn so với khi sử dụng cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSBT). Điều này cho thấy rằng khi sự ảnh hưởng của biến dạng theo phương z là quan trọng và cần xem xét đưa vào khi nghiên cứu ứng xử của dầm chức năng khi chịu tải trọng cơ nhiệt.



(a) $p = 1$ and $L/h = 20$



(b) $L/h = 30$

Hình 4.1 Giá trị tần số dao động không thứ nguyên của dầm chức năng ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$) với ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu và tăng nhiệt độ (TD).

- ✚ Khi tăng giá trị hằng số vật liệu dẫn đến thể tích của thành phần kim loại tăng lên khi đó sẽ làm cho dầm chức năng trở nên mềm hơn vì vậy các giá trị tần số dao động riêng và lực tới hạn sẽ giảm đi.
- ✚ Khi tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ và độ ẩm thì các kết quả số nghiên cứu sẽ nhỏ hơn so với khi tính chất vật liệu không phụ thuộc vào nhiệt độ, do đó cho thấy tầm quan trọng của nghiên cứu dầm chức năng khi có tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ và độ ẩm.
- ✚ Khi nhiệt độ tăng lên, giá trị lực tới hạn do nhiệt và tần số dao động riêng khi sự phân bố nhiệt độ và độ ẩm theo dạng phi tuyến sẽ lớn hơn so với khi nhiệt độ phân bố đều.
- ✚ Giá trị lực tới hạn do nhiệt và tần số dao động riêng khi có nhiệt độ phân bố phi tuyến theo quy luật Fourier sẽ nhỏ hơn khi nhiệt độ theo quy luật hình sin.
- ✚ Giá trị lực tới hạn do nhiệt và tần số dao động riêng của dầm chức năng khi độ ẩm tăng lên.

Bảng 4.8 Giá trị tần số dao động không thứ nguyên ($\hat{\omega}$) đảm chức năng khi nhiệt độ và độ ẩm tăng theo quy luật hình sin ($L/h = 20, TD$).

ĐKB	ΔC	Lý thuyết	$\Delta T(K) = 0$			$\Delta T(K) = 40$		
			$p=0.2$	1	5	$p=0.2$	1	5
Tra đơn	$\Delta C = 0\%$	HSBT	8.2127	6.1295	4.9846	7.9533	5.8962	4.7572
		Quasi-3D	7.8828	5.8824	4.7825	7.6122	5.6383	4.5440
		HSBT ^a	7.8889	5.8879	4.7882	7.6399	5.6639	4.5699
		HSBT[77]	7.8817	5.8491	4.7664	–	–	–
	$\Delta C = 1\%$	HSBT	8.1874	6.0529	4.8399	7.9272	5.8163	4.6044
		Quasi-3D	7.8565	5.8026	4.6316	7.5848	5.5547	4.3841
		HSBT ^a	7.8646	5.8143	4.6493	7.6148	5.5872	4.4232
		HSBT[77]	–	–	–	–	–	–
	$\Delta C = 2\%$	HSBT	8.1619	5.9753	4.6907	7.9009	5.7353	4.4464
		Quasi-3D	7.8300	5.7217	4.4757	7.5574	5.4699	4.2180
		HSBT ^a	7.8402	5.7398	4.5061	7.5896	5.5094	4.2716
		HSBT[77]	–	–	–	7.5826	5.4650	4.2429
Ngàm-Khớp	$\Delta C = 0\%$	Quasi-3D	12.3395	9.1845	7.4860	12.1444	9.0147	7.3230
	$\Delta C = 1\%$	Quasi-3D	12.3199	9.1253	7.3749	12.1245	8.9540	7.2085
	$\Delta C = 2\%$	Quasi-3D ^a	12.3003	9.0656	7.2619	12.1045	8.8930	7.0919
Ngàm-Ngàm	$\Delta C = 0\%$	Quasi-3D	17.8621	13.2929	10.8379	17.7252	13.1818	10.7347
	$\Delta C = 1\%$	Quasi-3D	17.8478	13.2495	10.7567	17.7107	13.1379	10.6521
	$\Delta C = 2\%$	Quasi-3D ^a	17.8334	13.2059	10.6748	17.6962	13.0938	10.5687

Chương 5 Phân tích hiệu ứng kích thước đến hành vi ứng xử của lực tới hạn do nhiệt và dao động lên dầm chức năng trong môi trường nhiệt độ

5.1 Giới thiệu

Lý thuyết hiệu chỉnh ứng suất được dùng để phân tích lực tới hạn do nhiệt của dầm micro chức năng dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao trong môi trường nhiệt độ thay đổi. Dầm được giả định là dầm chức năng theo chiều dày dầm; trong khi hệ số Poisson được giả định là hằng số. Sử dụng nguyên lý năng lượng cực tiểu để ứng dụng cho phương trình động lượng tổng quát và các điều kiện biên khác nhau cho dầm chức năng. Lời giải Ritz được sử dụng để giải quyết phương trình động lượng tổng quát với các điều kiện biên khác nhau.

Lý thuyết đàn hồi phi cục bộ là sự kết hợp của hai cơ sở lý thuyết là lý thuyết dầm Timoshenko và lý thuyết đàn hồi phi cục bộ Eringer. Lời giải Ritz được sử dụng để giải quyết cho phương trình động lượng với các điều kiện biên khác nhau. Mục đích của chương này là đề xuất phương pháp phân tích dầm micro chức năng và dầm nano chức năng với các điều kiện biên khác nhau trong môi trường nhiệt độ. Các kết quả số được so sánh với các nghiên cứu trước khi ảnh hưởng hằng số vật liệu, các hiệu ứng về thay đổi tỉ lệ L/h , hằng số thay đổi kích thước dầm, các điều kiện biên khác nhau... sẽ được xem xét.

5.2 Cấu tạo hình học của dầm chức năng

Cấu tạo hình học của dầm như ở hình 2.6a và các tính chất vật liệu được trình bày ở phần 2.1:

5.3 Cơ sở lý thuyết dầm nano chức năng

5.3.1. Chuyển vị và biến dạng

Trường chuyển vị của dầm Timoshenko :

$$u_1(x, z, t) = u(x, t) + z\theta(x, t), u_3(x, z, t) = w(x, t) \quad (5.1)$$

Trường biến dạng rút ra từ công thức 5.1 như sau:

$$\varepsilon_x = u_{,x} + z\theta_{,x} = \varepsilon_x^{(0)} + z\varepsilon_x^{(1)}, \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^{(0)} = \theta + w_{,x} \quad (5.2)$$

5.3.2. Phương trình động lượng

Để rút ra các phương trình chuyển động của dầm, nguyên lý Hamilton đã được sử dụng.

$$0 = \int_0^T (\delta U - \delta K) dt \quad (5.3)$$

Sự biến đổi của năng lượng biến dạng được xác định:

$$\delta U = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV = \int_0^L (N_x \delta \varepsilon_x^{(0)} + M_x \delta \varepsilon_x^{(1)} + Q \delta \gamma_{xz}^{(0)}) dx \quad (5.4)$$

Trong đó các giá trị của ứng suất được xác định:

$$(N_x, M_x) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z) \sigma_x b dz, Q = \int_{-h/2}^{h/2} k^s \sigma_{xz} b dz \quad (5.5)$$

Với k^s là hệ số hiệu chỉnh cắt và được lựa chọn 5/6.

Phương trình động năng K được xác định như sau:

$$\delta K = \int_0^L \left[I_0 \dot{u} \delta \dot{u} + I_2 \dot{\theta} \delta \dot{\theta} + I_1 (\dot{u} \delta \dot{\theta} + \dot{\theta} \delta \dot{u}) + I_0 \dot{w} \delta \dot{w} \right] dx \quad (5.6)$$

Đưa phương trình 5.4 và 5.6 vào phương trình 5.3 dẫn đến sự biến đổi của phương trình động lượng như sau:

$$N_{x,x} = I_0 \ddot{u} + I_1 \ddot{\theta}, M_{x,x} - Q = I_1 \ddot{u} + I_2 \ddot{\theta}, Q_x = I_0 \ddot{w} \quad (5.7)$$

5.3.3. Lý thuyết đàn hồi phi cục bộ cho dầm nano chức năng

Dựa trên lý thuyết đàn hồi phi cục bộ của Eringen [66], ta có:

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij} = t_{ij} \quad (5.8)$$

Công thức 5.7 được viết dưới dạng tường minh:

$$\sigma_x - \mu \sigma_{x,xx} = Q_{11}(z) \varepsilon_x, \sigma_{xz} - \mu \sigma_{xz,xx} = Q_{55}(z) \gamma_{xz} \quad (5.9)$$

Đưa phương trình 5.2 vào phương trình 5.8 và rút ra được các ứng suất đưa vào phương trình 5.7, các giá trị của phương trình ứng suất được viết lại theo lý thuyết đàn hồi phi cục bộ như sau:

$$N_x - \mu N_{x,xx} = A u_{,x} + B \theta_{,x}, M_x - \mu M_{x,xx} = B u_{,x} + D \theta_{,x}, Q - \mu Q_{,xx} = A^s (\theta + w_{,x}) \quad (5.10)$$

Đưa phương trình 5.7 vào phương trình 5.10 ta được các kết quả của sau:

$$N_x = \mu (I_0 \ddot{u}_{,x} + I_1 \ddot{\theta}_{,x}) + A u_{,x} + B \theta_{,x}, M_x = \mu (I_0 \ddot{w} + I_1 \ddot{u}_{,x} + I_2 \ddot{\theta}_{,x}) + B u_{,x} + D \theta_{,x} \quad (5.11)$$

$$Q = \mu I_0 \ddot{w}_{,x} + A^s (\theta + w_{,x})$$

Đưa phương trình 5.11 vào phương trình 5.3 ta được phương trình tổng quát sau:

$$\int_0^L \int_0^T \left\{ \left[\mu (I_0 \ddot{u}_{,x} + I_1 \ddot{\theta}_{,x}) + A u_{,x} + B \theta_{,x} \right] \delta u_{,x} + \left[\mu (I_0 \ddot{w} + I_1 \ddot{u}_{,x} + I_2 \ddot{\theta}_{,x}) + B u_{,x} + D \theta_{,x} \right] \delta \theta_{,x} \right. \\ \left. + \left[\mu I_0 \ddot{w}_{,x} + A^s (\theta + w_{,x}) \right] (\delta \theta + \delta w_{,x}) \right\} dx dt = 0 \quad (5.12)$$

5.4 Dầm micro chức năng

5.4.1. Lý thuyết hiệu chỉnh ứng suất (MCST)

Trường chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSBT1):

$$u_i(x, z, t) = u(x, t) - z w_{,x} + f(z) \theta(x, t), u_3(x, z, t) = w(x, t)$$

Dựa trên lý thuyết hiệu chỉnh ứng suất (MCST) [12], các góc xoay quanh các trục x-, y-, z- được tính toán như sau:

$$\theta_x(x, z, t) = \frac{1}{2}(u_{3,y} + u_{2,z}) = 0, \theta_z(x, z, t) = \frac{1}{2}(u_{2,x} - u_{1,y}) = 0$$

$$\theta_y(x, z, t) = \frac{1}{2}(u_{1,z} + u_{3,x}) = \frac{1}{2}[f_{,z}(z)\theta - 2w_{,x}]$$

Trường biến dạng thẳng và biến do góc xoay như sau:

$$\varepsilon_{xx}(x, z, t) = u_{,x} - zw_{,xx} + f\theta_{,x}, \gamma_{xz}(x, z, t) = f_{,x}\theta$$

$$\chi_{xy}(x, z, t) = \frac{\partial\theta_y}{\partial x} = \frac{1}{2}[f_{,z}(z)\theta_{,x} - 2w_{,xx}]$$

$$\chi_{zy}(x, z, t) = \frac{\partial\theta_y}{\partial z} = \frac{1}{2}f_{,zz}(z)\theta$$

Quan hệ ứng suất và biến dạng theo lý thuyết đàn hồi như sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{13} & 0 \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

Quan hệ ứng suất và biến dạng do góc xoay được giới thiệu ở tài liệu [12]:

$$\begin{Bmatrix} m_{xy} \\ m_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xy} \\ \chi_{zy} \end{Bmatrix}$$

Trong đó

$$Q_{44}(x, z) = Q_{66}(x, z) = Q_{55}(x, z)\zeta^2 = \frac{E(x, z)}{2(1-\nu)}\zeta^2$$

Với ζ hằng số hiệu chỉnh kích thước dầm theo lý thuyết hiệu chỉnh ứng suất theo phương x.

5.4.2. Xây dựng phương trình năng lượng theo lý thuyết hiệu chỉnh ứng suất

Hàm Lagrangian được sử dụng để rút ra các phương trình chuyển động:

$$\Pi = U + V - K$$

Năng lượng biến dạng U như sau:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[Au_{,x}^2 - 2Bu_{,x}w_{,xx} + (A^m + D)w_{,xx}^2 + 2B^s u_{,x}\theta_{,x} - 2\left(\frac{B^m}{2} + D^s\right)w_{,xx}\theta_{,x} + \left(H^s + \frac{D^m}{4}\right)\theta_{,x}^2 + \left(A^s + \frac{H^m}{4}\right)\theta^2 \right] dx$$

Năng lượng V do nhiệt độ tạo nên như ở phương trình (4.11):

$$V = -\frac{1}{2} \int_0^L N^t (w_{,x})^2 dx$$

Động năng K được thể hiện bởi:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) \left[I_0 \dot{u}^2 - 2I_1 \dot{u} \dot{w}_{,x} + I_2 \dot{w}_{,x}^2 + 2J_1 \dot{\theta} \dot{u} - 2J_2 \dot{\theta} \dot{w}_{,x} + K_2 \dot{\theta}^2 + I_0 \dot{w}^2 \right] dx \quad (5.20)$$

Đưa các phương trình 5.19, 4.11 và 5.20 vào phương trình 5.18, Hàm Lagrangian được viết tường minh như sau:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[Au_{,x}^2 - 2Bu_{,x} w_{,xx} + (A^m + D) w_{,xx}^2 + 2B^s u_{,x} \theta_{,x} \right. \\ & \left. - 2 \left(\frac{B^m}{2} + D^s \right) w_{,xx} \theta_{,x} + \left(H^s + \frac{D^m}{4} \right) \theta_{,x}^2 + \left(A^s + \frac{H^m}{4} \right) \theta^2 \right] dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L N' (w_{,x})^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) \left[I_0 \dot{u}^2 - 2I_1 \dot{u} \dot{w}_{,x} + I_2 \dot{w}_{,x}^2 + 2J_1 \dot{\theta} \dot{u} - 2J_2 \dot{\theta} \dot{w}_{,x} \right. \\ & \left. + K_2 \dot{\theta}^2 + I_0 \dot{w}^2 \right] dx \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.5 Lời giải Ritz

5.5.1. Lời giải Ritz cho lý thuyết đàn hồi phi cục bộ

Dựa trên lời giải Ritz, trường chuyển vị được xấp xỉ như sau:

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^m \psi_j(x) u_j e^{i\omega t}, \quad w(x,t) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) w_j e^{i\omega t}, \quad \theta(x,t) = \sum_{j=1}^m \psi_j(x) \theta_j e^{i\omega t} \quad (5.22)$$

Đưa phương trình 5.22 vào phương trình 5.12, phương trình tổng quát có dạng:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 (\mathbf{M} + \mu \mathbf{M}_n)) \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (5.23)$$

Bảng 5.1 Các điều kiện biên cho dầm nano chức năng

ĐKB	Vị trí	Giá trị
Tựa đơn	$x=0$	$w = 0$
	$x=L$	$w = 0$
Ngàm-Tự do	$x=0$	$u = 0, w = 0, w_{,x} = 0, \theta = 0$
	$x=L$	-
Ngàm- Ngàm	$x=0, x=L$	$u = 0, w = 0, w_{,x} = 0, \theta = 0$

5.5.2. Lời giải Ritz cho lý thuyết hiệu chỉnh ứng suất

Dựa trên lời giải Ritz, trường chuyển vị ở phương trình 5.21 được xấp xỉ như sau:

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^m \psi_j(x) u_j e^{i\omega t}, \quad w(x,t) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) w_j e^{i\omega t}, \quad \theta(x,t) = \sum_{j=1}^m \psi_j(x) \theta_j e^{i\omega t} \quad (5.24)$$

Phương trình tổng quát như sau:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (5.25)$$

5.6 Kết quả số và thảo luận

Ví dụ 1: Phân tích giá trị tần số dao động cho lý thuyết biến dạng cắt bậc 1 kết hợp lý thuyết đàn hồi phi cục bộ của Eringen cho dầm nano chức năng (Loại A, với các điều kiện biên khác nhau)

Giá trị tần số dao động cho dầm nano chức năng như sau:

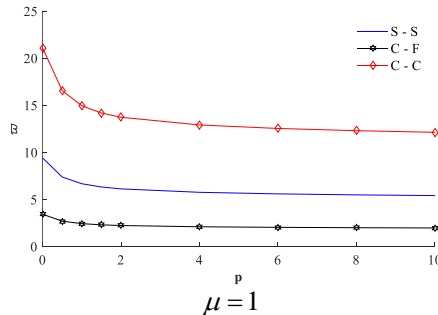
$$\hat{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho_c}{E_c}} \quad (5.26)$$

Bảng 5.2 chỉ ra rằng ảnh hưởng của hệ số phi cục bộ và hằng số vật liệu p cho dầm nano chức năng với ràng buộc 2 đầu dầm bằng ngàm. Các kết quả cho thấy rằng khi hằng số vật liệu tăng lên sẽ làm cho giá trị tần số dao động giảm xuống. Mặc dù, hệ số phi cục bộ tăng lên thì giá trị tần số dao động giảm xuống cho tất cả các trường hợp.

Hình 5.1 cho thấy rằng giá trị tần số dao động với các điều kiện biên khác nhau, hằng số vật liệu $p=1$, hệ số phi cục bộ $\mu=1$ và $L/h=100$. Trong hình này, giá trị tần số dao động giảm dần theo các điều kiện biên lần lượt như sau: Ngàm-ngàm, tựa đơn – tựa đơn, và ngàm-tựa đơn. Giá trị tần số dao động giảm nhanh nhất khi hằng số vật liệu nằm trong khoảng từ 0 đến 2, và sau đó giá trị tần số sẽ có xu hướng đi ngang khi hằng số vật liệu tăng lên.

Bảng 5.2 Giá trị của tần số dao động khi hệ số μ theo lý thuyết đàn hồi phi cục bộ cho dầm nano chức năng (Loại A, C-C, $L/h=100$, $N=10$).

μ (nm) ²	Lý thuyết	p					
		0	0.5	1	2	5	10
0	FSDT	22.3597	17.5498	15.8506	14.5525	13.4636	12.8607
	Eltaher [78]	22.3744	17.5613	15.8612	14.5626	13.4733	12.8698
1	FSDT	21.0991	16.5604	14.9570	13.7321	12.7047	12.1358
	Eltaher [78]	21.1096	16.5686	14.9645	13.7394	12.7116	12.1423
3	FSDT	19.0974	14.9892	13.5379	12.4294	11.4995	10.9845
	Eltaher [78]	19.1028	14.9934	13.5419	12.4332	11.5032	10.9880



Hình 5.1 Giá trị tần số dao động với các điều kiện biên khác nhau

Ví dụ 2: Phân tích giá trị dao động riêng và lực tới hạn do nhiệt sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSBT1) và lý thuyết hiệu chỉnh ứng suất cho dầm micro chức năng (Loại A)

Dầm micro chức năng được cấu tạo từ gốm (Si_3N_4) và kim loại (SUS304) như ở bảng

4.1. Giá trị dao động tự do và lực tới hạn do nhiệt như ở công thức sau:

$$\hat{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho_c}{E_c}}, \lambda = \Delta T_{cr} \frac{L^2}{h^2} \alpha_m \quad (5.27)$$

Trong đó: α_m là hệ số giãn nở nhiệt của kim loại tại T_0 (K). Cần chú ý rằng mối quan hệ nhiệt độ được giả thuyết như sau: $T_0 = 300$ (K), $T_b - T_0 = 5$ (K).

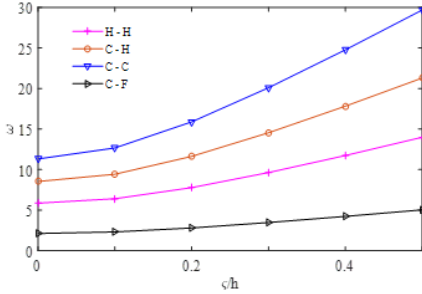
Các giá trị tần số dao động của dầm micro chức năng với các điều kiện biên khác nhau và tỉ lệ $L/h = 20$ như ở bảng. Khi hệ số hiệu chỉnh ứng suất ($\zeta = 0$), các giá trị tần số dao động của luận án có kết quả tương đồng so với kết quả của nghiên cứu HSBT[79]. Một số kết quả mới của luận án cũng được đưa ra để làm giá trị so sánh cho các nghiên cứu sau này. Các kết quả nghiên cứu của luận án sẽ tăng lên khi tăng hệ số hiệu chỉnh ứng suất nhưng kết quả nghiên cứu sẽ giảm đi khi hằng số vật liệu tăng lên. Điều này cho phép ta dự đoán được khi tăng hằng số hiệu chỉnh ứng suất sẽ làm cho dầm micro cứng hơn.

Bảng 5.3 Giá trị tần số dao động ($\hat{\omega}$) của dầm micro chức năng chịu ảnh hưởng bởi nhiệt độ phân bố tuyến tính (Loại A, Si_3N_4 / SUS304, $L/h = 20$, TD).

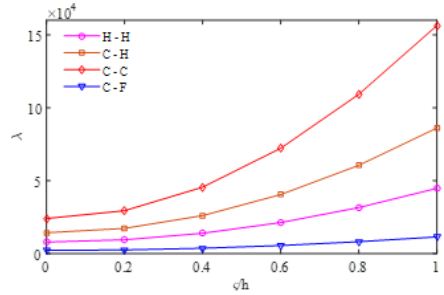
ĐKB	L/h	ζ	Lý thuyết	$\Delta T(\text{K}) = 80$		
				$p=0.1$	0.5	1
Tựa đơn-Tựa đơn	20	$\zeta = 0$	HSBT[79]	8.1742	6.2547	5.4252
		$\zeta = 0$	HSBT ^M	8.2961	6.3630	5.5274
		$\zeta = h/4$	HSBT ^M	9.5607	7.3732	6.4144
		$\zeta = h/2$	HSBT ^M	12.6144	9.7969	8.5385
		$\zeta = h$	HSBT ^M	20.7296	16.1946	14.1358
Ngàm-Ngàm	20	$\zeta = 0$	HSBT[79]	19.8063	15.3661	13.4427
		$\zeta = 0$	HSBT ^M	19.8906	15.4281	13.4944
		$\zeta = h/4$	HSBT ^M	22.5962	17.5680	15.3616
		$\zeta = h/2$	HSBT ^M	29.2328	22.8038	19.9321
		$\zeta = h$	HSBT ^M	47.1565	36.8971	32.2399

M: Dầm micro chức năng

Ở hình 5.2-5.3 cho thấy rằng sự thay đổi của giá trị tần số dao động và lực tới hạn do nhiệt khi với hằng số hiệu chỉnh ứng suất ζ/h khác nhau của dầm. Khi tỉ lệ ζ/h tăng lên và với các điều kiện biên khác nhau thì ở điều kiện biên Ngàm-Ngàm sẽ cho kết quả lớn nhất trong khi đó với điều kiện biên Ngàm-tự do thì kết quả nghiên cứu là nhỏ nhất.



Hình 5.2 Ảnh hưởng của hệ số hiệu chỉnh ứng suất đến giá trị tần số dao động (ω) của dầm micro chức năng ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$) với NLT, $p=1$, $L/h=5$



Hình 5.3 Ảnh hưởng của hệ số hiệu chỉnh ứng suất đến giá trị lực tối hạn do nhiệt (λ) của dầm micro chức năng ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$) với NLT, $p=1$, $L/h=5$

5.7 Conclusions

Trong chương này, đã nghiên cứu về tần số dao động của dầm nano chức năng khi sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. hiệu ứng về kích thước được sử dụng theo lý thuyết đàn hồi phi cục bộ của Eringen. Phương trình năng lượng đã được khai triển và sử dụng lời giải Ritz để xấp xỉ các trường chuyển vị của dầm. Tần số dao động của dầm nano chức năng đã được nghiên cứu với các điều kiện biên khác nhau, hệ số phi cục bộ được giả định cho nhiều trường hợp. Các kết quả nghiên cứu đã chỉ ra rằng hệ số phi cục bộ cũng ảnh hưởng đáng kể đến giá trị tần số dao động của dầm nano chức năng.

Còn đối với hiệu ứng về kích thước dầm sử dụng lý thuyết dầm hiệu chỉnh ứng suất được nghiên cứu cho tần số dao động và lực tối hạn do nhiệt cho dầm micro chức năng với các điều kiện biên khác nhau. Phương trình động lượng được sử dụng từ phương trình Lagrange. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng nghiên cứu hiện tại là hiệu quả để dự đoán hành vi ứng xử của dầm micro chức năng.

Chương 6 Phân tích dầm chức năng sử dụng phương pháp pháp phần tử hữu hạn (FEM)

6.1 Giới thiệu

Trong chương này, phương pháp nghiên cứu được mở rộng từ nghiên cứu trước [5], sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để nghiên cứu giá trị tần số dao động và lực tối hạn của dầm chức năng. Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao được sử dụng để nghiên cứu dầm chức năng. Các phương trình chuyển động và điều kiện biên được lấy từ nguyên lý Hamilton. Ảnh hưởng của hằng số phân bố vật liệu p , tỷ lệ L/h và các điều kiện biên khác nhau đến dầm chức năng được đưa ra để phân tích. Kết quả số cho thấy các hiệu ứng nêu trên đóng vai trò rất quan trọng đối với phân tích dao động và lực tối hạn của dầm chức năng.

6.2 Cơ sở lý thuyết

6.2.1 Cấu tạo dầm chức năng

Cấu tạo hình học của dầm như ở hình 2.6a và các tính chất vật liệu được trình bày ở phần 2.1:

6.2.2 Cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao

Trường chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSBT1):

$$u_1(x, z, t) = u(x, t) - zw_{,x}(x, t) + \left[\sinh^{-1}\left(\frac{rz}{h}\right) - \frac{8rz^3}{3h^3\sqrt{r^2+4}} \right] \theta(x, t) \quad (r=1) \quad (6.1)$$

$$u_3(x, z, t) = w(x, t)$$

Trường biến dạng được tính toán từ trường chuyển vị:

$$\varepsilon_x(x, z, t) = u_{,x} - zw_{,xx} + f\theta_{,x}, \quad \gamma_{xz}(x, z, t) = f_{,z}(z)\theta \quad (6.2)$$

6.2.3 Quan hệ ứng suất biến dạng

Ứng suất và biến dạng có quan hệ như sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{13} & 0 \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

6.2.4 Xây dựng phương trình động lượng

Để rút ra các phương trình động lượng, nguyên lý Hamilton được sử dụng:

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (6.4)$$

Năng lượng do biến dạng gây ra:

$$\delta U = \int_0^L \left[N_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - M_x^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + Q_x \delta \gamma_{xz} \right] b dx \quad (6.5)$$

Trong đó $dA = dx dy$ và N_x , M_x^b , M_x^s , Q_{xz} là các thành phần lực được rút ra như sau:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(z) b dz, \quad M_x^b = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx}(z) b dz, \quad M_x^s = \int_{h/2}^{h/2} f \sigma_{xx}(z) b dz, \quad Q_{xz} = \int_{h/2}^{h/2} f_{,z} \sigma_{xz}(z) b dz \quad (6.6)$$

Bằng cách sử dụng các phương trình (6.2), (6.3) và (6.6), các phương trình cấu thành cho kết quả ứng suất và biến dạng thu được:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x^b \\ M_x^s \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s & 0 \\ B & D & D^s & 0 \\ B^s & D^s & H^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ w_{,xx} \\ \theta_{,x} \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

Sự biến đổi năng lượng bởi lực dọc trục N_{xx}^0 như sau:

$$\delta V = - \int_0^L N_{xx}^0 w_{,x} \delta w_{,x} b dx \quad (6.8)$$

Sự biến đổi của động năng có thể được biểu thị như sau:

$$\delta K = \int_0^L \left[\delta \dot{u} (I_0 \dot{u} - I_1 \dot{w}_{,x} + J_1 \dot{\theta}) + \delta \dot{\theta} (I_0 \dot{\theta}) + \delta \dot{w}_{,x} (-I_1 \dot{u} + I_2 \dot{w}_{,x} - J_2 \dot{\theta}) + \delta \dot{\theta} (J_1 \dot{u} - J_2 \dot{w}_{,x} + K_2 \dot{\theta}) \right] dx \quad (6.9)$$

Đưa các phương trình (6.5), (6.8) và (6.9) vào phương trình (6.4), phương trình động lượng ở dạng yếu như sau:

$$0 = \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \left[N_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - M_x^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + Q_x \delta \gamma_{xz} - N_{xx}^0 w_{,x} \delta w_{,x} - (\delta \dot{u} (I_0 \dot{u} - I_1 \dot{w}_{,x} + J_1 \dot{\theta}) + \delta \dot{\theta} (I_0 \dot{\theta}) + \delta \dot{w}_{,x} (-I_1 \dot{u} + I_2 \dot{w}_{,x} - J_2 \dot{\theta}) + \delta \dot{\theta} (J_1 \dot{u} - J_2 \dot{w}_{,x} + K_2 \dot{\theta})) \right] dx dt \quad (6.10)$$

6.2.5 Phát triển phương trình động lượng

Phương trình cân bằng cho các chuyển vị δu , δw và $\delta \theta$ có dạng như sau:

$$\begin{aligned} \delta u: \frac{\partial N_x}{\partial x} &= I_0 \ddot{u} - I_1 \ddot{w}_{,x} + J_1 \ddot{\theta} \\ \delta w: \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + N_{xx}^0 w_{,xx} + q &= -I_1 \ddot{u}_{,x} + I_2 \ddot{w}_{,xx} - J_2 \ddot{\theta}_{,x} \\ \delta \theta: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + Q_{x,x} &= J_1 \ddot{u}_{,x} - J_2 \ddot{w}_{,xx} + K_2 \ddot{\theta}_{,x} + I_0 \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Đưa phương trình (6.7) vào phương trình (6.11), hình thức rõ ràng của các phương trình chuyển động có thể được biểu thị liên quan đến độ cứng

$$\begin{aligned} \delta u: A u_{,xx} - B w_{,xxx} + B^s \theta_{,xx} &= I_0 \ddot{u} - I_1 \ddot{w}_{,x} + J_1 \ddot{\theta} \\ \delta w: B u_{,xxx} - D w_{,xxxx} - D^s \theta_{,xxx} + N_{xx}^0 w_{,xx} &= -I_1 \ddot{u}_{,x} + I_2 \ddot{w}_{,xx} - J_2 \ddot{\theta}_{,x} \\ \delta \theta: B^s u_{,xxx} - D^s w_{,xxx} - H^s \theta_{,xxx} + A^s \theta_{,xx} &= J_1 \ddot{u}_{,x} - J_2 \ddot{w}_{,xx} + K_2 \ddot{\theta}_{,x} + I_0 \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (6.12)$$

6.2.1 Lựa chọn lời giải số (FEM)

Việc lựa chọn lời giải số ở phần này đã được trình bày ở phần 2.5.3 chương 2. Phương trình tổng quát cho 1 phần tử dầm như sau:

$$(\mathbf{K} - N_{xx}^0 \mathbf{G} - \omega^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\chi} = \mathbf{0} \quad (6.13)$$

6.3 Kết quả số và thảo luận

ở chương này đề xuất phân tích giá trị tần số dao động và lực tới hạn cho dầm chức năng với sự ảnh hưởng của tỉ lệ L/h, hằng số vật liệu p, và 3 điều kiện biên khác nhau như sau: Ngàm - Ngàm (C - C), Ngàm-Tự do (C - F) và tựa đơn (S - S). Bảng 6.1 thể hiện tính chất vật liệu sẽ nghiên cứu:

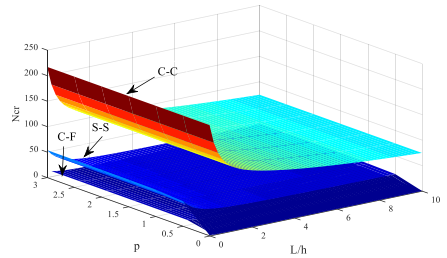
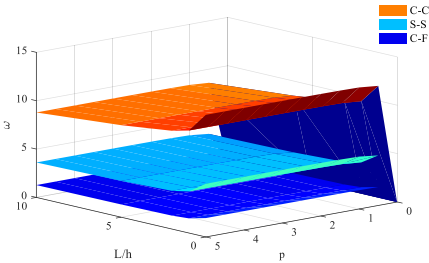
Hình 6.1 Vật liệu Gôm và Kim loại

Vật liệu	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	ν
Alumina (Al ₂ O ₃)	380	3960	0.3
Aluminum (Al)	70	2702	0.3

$$\bar{N}_{cr} = N_{cr} \frac{12L^2}{E_m h^3}, \bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (6.14)$$

Các kết quả số thu được đem so sánh với các kết quả nghiên cứu trước theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSBT) [5] và [69]. Kết quả nghiên cứu ở bảng 6.2-6.3 trình bày giá trị tần số dao động và lực tới hạn cầu dầm chức năng (Loại A) với 3 điều kiện biên và các cơ các hằng số phân bố vật liệu khác nhau, các kết quả này được so sánh với các nghiên cứu trước (TSBT) ([5], [69]). Các kết quả nghiên cứu được đề xuất có sự tương đồng so với các kết quả của nghiên cứu trước.

Hình 6.3-6.4 thể hiện các giá trị khác nhau của tần số dao động và lực tới hạn với hằng số vật liệu và tỉ lệ L/h khác nhau của dầm chức năng cho 3 điều kiện biên. ở các hình này cho thấy rằng, các giá trị dao động tự do và lực tới hạn lớn nhất ở điều kiện biên Ngàm – Ngàm và bé nhất trong trường hợp dầm bị ràng buộc bởi Ngàm – Tự do. Các giá trị nay sẽ giảm hằng số vật liệu tăng lên.



Hình 6.1 Giá trị tần số dao động của dầm chức năng với các điều kiện biên khác nhau

Hình 6.2 Giá trị lực tới hạn của dầm chức năng với các điều kiện biên khác nhau

Bảng 6.2 Giá trị của tần số dao động cho dầm chức năng với các điều kiện biên khác nhau ($L/h=5$, Loại A).

L/h	ĐKB	Lý thuyết	p					
			0	0.5	1	2	5	10
5	Tựa đơn	HSBT [69]	5.1527	4.4107	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816
		HSBT ^F	5.1528	4.4011	3.9711	3.5972	3.3736	3.2650
Ngàm-Ngàm	Ngàm	HSBT [69]	10.0699	8.7463	7.9499	7.1766	6.4940	6.1652
		HSBT ^F	10.0698	8.7439	7.9501	7.1768	6.4932	6.1654
Ngàm-Tự do	Tự do	HSBT [69]	1.8952	1.6182	1.4633	1.3325	1.2592	1.2183
		HSBT ^F	1.8952	1.6178	1.4633	1.3326	1.2592	1.2184

Bảng 6.3 Giá trị của lực tới hạn cho dầm chức năng với các điều kiện biên khác nhau ($L/h=5$, Loại A).

L/h	BCs	Reference	P					
			0	0.5	1	2	5	10
5	Tựa đơn	HSBT [5]	48.8406	32.0013	24.6894	19.1577	15.7355	14.1448
		HSBT ^F	48.5960	31.8593	24.5841	19.0710	15.6425	14.0509
	Ngàm-Ngàm	HSBT [5]	154.5610	103.7167	80.5940	61.7666	47.7174	41.7885
		HSBT ^F	152.1513	102.2467	79.4884	60.8802	46.8791	40.9865
	Ngàm-Tự do	HSBT [5]	13.0771	8.5000	6.5427	5.0977	4.2772	3.8820
		HSBT ^F	13.0595	8.4900	6.5352	5.0916	4.2703	3.8748

F: Phần tử hữu hạn

6.4 Kết luận

Dựa trên lý thuyết biến dạng cắt hiệu chỉnh, Giá trị tần số dao động và lực tới hạn của dầm chức năng đã được trình bày. Các phương trình chuyển động và các điều kiện biên khác nhau được lấy từ nguyên lý Hamilton. Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn được phát triển để xác định giá trị tần số dao động và lực tới hạn. Ảnh hưởng của hằng số vật liệu p , tỷ lệ L/h và các điều kiện biên khác nhau đã được nghiên cứu. Các kết quả nghiên cứu chính xác và đáng tin cậy trong việc phân tích giá trị dao động riêng và lực tới hạn của dầm chức năng.

Chương 7 Kết luận và kiến nghị

7.1 Kết luận

Trong luận án này, tác giả đã đề xuất một số mô hình dầm cho phân tích tĩnh, dao động và lực tới hạn cho dầm đẳng hướng và dầm sandwich chức năng khi chịu tải trọng cơ nhiệt ẩm.

Các kết luận chính của luận án như sau:

- ✚ Luận án đã giới thiệu một tổng quan ngắn gọn về các lý thuyết tính toán và phương pháp của dầm composite, từ đó một số phát hiện mới được tìm thấy và đề xuất.
- ✚ Luận án trình bày chi tiết hơn về vật liệu composite, cấu trúc vi mô và phương pháp ước tính các tính chất đàn hồi của vật rắn. Các đánh giá tài liệu nghiên cứu trước cũng tập trung vào các chủ đề có liên quan đến luận án, chẳng hạn như lý thuyết dầm, phương pháp giải tích và số để phân tích tĩnh, dao động, và lực tới hạn của dầm khi chịu tải trọng cơ thủy nhiệt.
- ✚ Luận án đã đề xuất cơ sở lý thuyết tổng quát cho dầm theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao để phân tích ứng xử cho dầm chức năng. Cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao tổng quát cho dầm cho dầm chức năng này dựa trên cơ sở của lý thuyết đàn hồi hai chiều và kết quả thu được các cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao khác nhau. Thêm vào đó, hai mô hình dầm bậc cao cũng được đề xuất như sau: mô hình thứ nhất với hàm biến dạng cắt bậc cao mới được đề xuất là một hàm lượng giác kết hợp với đa thức bậc cao, và mô hình dầm thứ hai là lý thuyết ba biến sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao tiếp cận 3 chiều để phân tích dầm.

- ✦ Luận án cũng đã nghiên cứu hành vi ứng xử của dầm sandwich chức năng khi chịu ảnh hưởng của nhiệt độ độ ẩm tác dụng. Các ứng xử này đều dựa trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Sự ảnh hưởng của nhiệt độ và độ ẩm cũng được đề xuất theo nhiều cách khác nhau như là phân bố đều, phân bố tuyến tính, và phân bố phi tuyến.
- ✦ Hiệu ứng kích thước cũng được đưa ra để nghiên cứu cho dầm ở các cấp độ khác nhau trong môi trường nhiệt độ. Cơ sở lý thuyết cũng được dựa trên lý thuyết đàn hồi hai chiều với các điều kiện biên khác nhau.
- ✦ Phương pháp số cũng được nghiên cứu trong luận án này để làm rõ hơn khi phân tích dầm chức năng bằng phương pháp phần tử hữu hạn cho các điều kiện biên khác nhau. Các tỉ lệ L/h , hằng số vật liệu $p...$ cũng được đưa vào để làm rõ các giá trị nghiên cứu của luận án.

7.2 Kiến nghị

Trong quá trình nghiên cứu, luận án cũng gặp phải những khó khăn và hạn chế nhất định. Do đó, một số vấn đề tồn tại trong luận án sẽ được phát triển tiếp theo như sau:

- ✦ Phân tích ứng xử dầm chức năng bằng những phương pháp số khác nhau sẽ được nghiên cứu trong thời gian sắp tới.
- ✦ Phát triển bài toán đàn hồi hai chiều để phân tích ứng xử của dầm chức năng với các điều kiện biên khác nhau.
- ✦ Phát triển mô hình dầm với cấu tạo hình học khác nhau.
- ✦ Phát triển cơ sở lý thuyết và phân tích dầm chức năng và sandwich chức năng dày.

Tài liệu tham khảo

- [1] Y. Ghugal and R. Shimpi, "A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams," *Journal of reinforced plastics and composites*, vol. 20, pp. 255-272, 2001.
- [2] A. S. Sayyad and Y. M. Ghugal, "Modeling and analysis of functionally graded sandwich beams: A review," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, pp. 1-20, 2018.
- [3] T.-K. Nguyen, K. Sab, and G. Bonnet, "First-order shear deformation plate models for functionally graded materials," *Composite Structures*, vol. 83, pp. 25-36, 2008.
- [4] T.-K. Nguyen, T. P. Vo, and H.-T. Thai, "Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory," *Composites Part B: Engineering*, vol. 55, pp. 147-157, 2013.
- [5] T.-K. Nguyen, T. T.-P. Nguyen, T. P. Vo, and H.-T. Thai, "Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory," *Composites Part B: Engineering*, vol. 76, pp. 273-285, 2015.
- [6] J. Mantari, A. Oktem, and C. G. Soares, "A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates," *Composites Part B: Engineering*, vol. 43, pp. 1489-1499, 2012.

- [7] T. P. Vo, H.-T. Thai, T.-K. Nguyen, and F. Inam, "Static and vibration analysis of functionally graded beams using refined shear deformation theory," *Meccanica*, vol. 49, pp. 155-168, 2014.
- [8] T.-K. Nguyen, "A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials," *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, vol. 11, pp. 203-219, 2015.
- [9] H.-T. Thai, T. P. Vo, T. Q. Bui, and T.-K. Nguyen, "A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates," *Acta Mechanica*, vol. 225, pp. 951-964, 2014.
- [10] A. C. Eringen, "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves," *Journal of applied physics*, vol. 54, pp. 4703-4710, 1983.
- [11] J. Peddieson, G. R. Buchanan, and R. P. McNitt, "Application of nonlocal continuum models to nanotechnology," *International Journal of Engineering Science*, vol. 41, pp. 305-312, 2003.
- [12] F. Yang, A. Chong, D. C. C. Lam, and P. Tong, "Couple stress based strain gradient theory for elasticity," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, pp. 2731-2743, 2002.
- [13] R. A. Toupin, "Elastic materials with couple-stresses," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 11, pp. 385-414, 1962.
- [14] R. Mindlin and H. Tiersten, "Effects of couple-stresses in linear elasticity," *Archive for Rational Mechanics and analysis*, vol. 11, pp. 415-448, 1962.
- [15] W. Koiter, "Couple-stress in the theory of elasticity," in *Proc. K. Ned. Akad. Wet.*, 1964, pp. 17-44.
- [16] R. D. Mindlin, "Micro-structure in linear elasticity," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 16, pp. 51-78, 1964.
- [17] S. Park and X. Gao, "Bernoulli–Euler beam model based on a modified couple stress theory," *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 16, p. 2355, 2006.
- [18] J. Reddy, "Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 59, pp. 2382-2399, 2011.
- [19] M. Şimşek, "Nonlocal effects in the forced vibration of an elastically connected double-carbon nanotube system under a moving nanoparticle," *Computational Materials Science*, vol. 50, pp. 2112-2123, 2011.
- [20] M. Aydogdu and V. Taskin, "Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges," *Materials & design*, vol. 28, pp. 1651-1656, 2007.
- [21] T. Kant and K. Swaminathan, "Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory," *Composite structures*, vol. 56, pp. 329-344, 2002.
- [22] M. Aydogdu, "Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 47, pp. 1740-1755, 2005.

- [23] K. Pradhan and S. Chakraverty, "Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method," *Composites Part B: Engineering*, vol. 51, pp. 175-184, 2013.
- [24] M. Şimşek, "Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz method," *International Journal of Engineering & Applied Sciences*, vol. 1, pp. 1-11, 2009.
- [25] R. Bellman and J. Casti, "Differential quadrature and long-term integration," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 34, pp. 235-238, 1971.
- [26] P. Sharma, "Efficacy of Harmonic Differential Quadrature method to vibration analysis of FGPM beam," *Composite Structures*, vol. 189, pp. 107-116, 2018.
- [27] M. F. Shojaei and R. Ansari, "Variational differential quadrature: a technique to simplify numerical analysis of structures," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 49, pp. 705-738, 2017.
- [28] J. N. Reddy, "A simple higher-order theory for laminated composite plates," *Journal of applied mechanics*, vol. 51, pp. 745-752, 1984.
- [29] V. Kahya and M. Turan, "Vibration and stability analysis of functionally graded sandwich beams by a multi-layer finite element," *Composites Part B: Engineering*, vol. 146, pp. 198-212, 2018.
- [30] T. N. Nguyen, C. H. Thai, and H. Nguyen-Xuan, "On the general framework of high order shear deformation theories for laminated composite plate structures: a novel unified approach," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 110, pp. 242-255, 2016.
- [31] T. N. Nguyen, T. D. Ngo, and H. Nguyen-Xuan, "A novel three-variable shear deformation plate formulation: Theory and Isogeometric implementation," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 326, pp. 376-401, 2017.
- [32] C. H. Thai, A. Ferreira, and H. Nguyen-Xuan, "Isogeometric analysis of size-dependent isotropic and sandwich functionally graded microplates based on modified strain gradient elasticity theory," *Composite Structures*, vol. 192, pp. 274-288, 2018.
- [33] G. Liu, K. Dai, and T. T. Nguyen, "A smoothed finite element method for mechanics problems," *Computational Mechanics*, vol. 39, pp. 859-877, 2007.
- [34] T. Nguyen-Thoi, T. Bui-Xuan, P. Phung-Van, H. Nguyen-Xuan, and P. Ngo-Thanh, "Static, free vibration and buckling analyses of stiffened plates by CS-FEM-DSG3 using triangular elements," *Computers & structures*, vol. 125, pp. 100-113, 2013.
- [35] T. Nguyen-Thoi, P. Phung-Van, S. Nguyen-Hoang, and Q. Lieu-Xuan, "A coupled alpha-FEM for dynamic analyses of 2D fluid–solid interaction problems," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 271, pp. 130-149, 2014.
- [36] N. D. Duc, K. Seung-Eock, and D. Q. Chan, "Thermal buckling analysis of FGM sandwich truncated conical shells reinforced by FGM stiffeners resting on elastic foundations using FSDT," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 41, pp. 331-365, 2018.

- [37] N. D. Duc, K. Seung-Eock, T. Q. Quan, D. D. Long, and V. M. Anh, "Nonlinear dynamic response and vibration of nanocomposite multilayer organic solar cell," *Composite Structures*, vol. 184, pp. 1137-1144, 2018.
- [38] N. D. Duc, K. Seung-Eock, N. D. Tuan, P. Tran, and N. D. Khoa, "New approach to study nonlinear dynamic response and vibration of sandwich composite cylindrical panels with auxetic honeycomb core layer," *Aerospace Science and Technology*, vol. 70, pp. 396-404, 2017.
- [39] N. D. Duc and H. Van Tung, "Mechanical and thermal postbuckling of higher order shear deformable functionally graded plates on elastic foundations," *Composite Structures*, vol. 93, pp. 2874-2881, 2011.
- [40] T. I. Thinh, "Static behavior and vibration control of piezoelectric cantilever composite plates and comparison with experiments," *Computational Materials Science*, vol. 49, pp. S276-S280, 2010.
- [41] T. I. Thinh and T. H. Quoc, "Finite element modeling and experimental study on bending and vibration of laminated stiffened glass fiber/polyester composite plates," *Computational Materials Science*, vol. 49, pp. S383-S389, 2010.
- [42] H. Van Tung, "Thermal and thermomechanical postbuckling of FGM sandwich plates resting on elastic foundations with tangential edge constraints and temperature dependent properties," *Composite Structures*, vol. 131, pp. 1028-1039, 2015.
- [43] H. Van Tung, "Nonlinear axisymmetric response of FGM shallow spherical shells with tangential edge constraints and resting on elastic foundations," *Composite Structures*, vol. 149, pp. 231-238, 2016.
- [44] D. K. Nguyen, "Large displacement behaviour of tapered cantilever Euler–Bernoulli beams made of functionally graded material," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 237, pp. 340-355, 2014.
- [45] D. K. Nguyen, "Large displacement response of tapered cantilever beams made of axially functionally graded material," *Composites Part B: Engineering*, vol. 55, pp. 298-305, 2013.
- [46] T.-K. Nguyen, N.-D. Nguyen, T. P. Vo, and H.-T. Thai, "Trigonometric-series solution for analysis of laminated composite beams," *Composite Structures*, vol. 160, pp. 142-151, 2017.
- [47] T.-K. Nguyen, V.-H. Nguyen, T. Chau-Dinh, T. P. Vo, and H. Nguyen-Xuan, "Static and vibration analysis of isotropic and functionally graded sandwich plates using an edge-based MITC3 finite elements," *Composites Part B: Engineering*, vol. 107, pp. 162-173, 2016.
- [48] N. Quan, N. H. Son, and N. Q. Tuan, "Minimum Volume of the Longitudinal Fin with Rectangular and Triangular Profiles by a Modified Newton–Raphson Method," *International Journal of Computational Methods*, vol. 15, p. 1850034, 2018.
- [49] M. Koizumi, "FGM activities in Japan," *Composites Part B: Engineering*, vol. 28, pp. 1-4, 1997.

- [50] S. Suresh and A. Mortensen, *Fundamentals of functionally graded materials: The Institut of Materials*, 1998.
- [51] Y. Miyamoto, W. Kaysser, B. Rabin, A. Kawasaki, and R. G. Ford, *Functionally graded materials: design, processing and applications* vol. 5: Springer Science & Business Media, 2013.
- [52] M. Dao, P. Gu, A. Maewal, and R. Asaro, "A micromechanical study of residual stresses in functionally graded materials," *Acta materialia*, vol. 45, pp. 3265-3276, 1997.
- [53] K. Wakashima, T. Hirano, and M. Niino, "Functionally Gradient Materials(Fgm) Architecture: A New Type of Ceramic-Metal Assemblage Designed for Hot Structural Components," 1990.
- [54] F. Ebrahimi and A. Jafari, "A higher-order thermomechanical vibration analysis of temperature-dependent FGM beams with porosities," *Journal of Engineering*, vol. 2016, 2016.
- [55] Y. Kiani and M. Eslami, "An exact solution for thermal buckling of annular FGM plates on an elastic medium," *Composites Part B: Engineering*, vol. 45, pp. 101-110, 2013.
- [56] F. Fazzolari and E. Carrera, "Thermal stability of FGM sandwich plates under various through-the-thickness temperature distributions," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 37, pp. 1449-1481, 2014.
- [57] B. Akgöz and Ö. Civalek, "Strain gradient elasticity and modified couple stress models for buckling analysis of axially loaded micro-scaled beams," *International Journal of Engineering Science*, vol. 49, pp. 1268-1280, 2011.
- [58] M. Aydogdu, "Semi-inverse method for vibration and buckling of axially functionally graded beams," *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 27, pp. 683-691, 2008.
- [59] B. Akgöz and Ö. Civalek, "Analysis of micro-sized beams for various boundary conditions based on the strain gradient elasticity theory," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 82, pp. 423-443, 2012.
- [60] A. H. Akbarzadeh, A. Abedini, and Z. T. Chen, "Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates," *Composite Structures*, vol. 119, pp. 598-609, 2015/01/01/ 2015.
- [61] B. Akgöz and Ö. Civalek, "Application of strain gradient elasticity theory for buckling analysis of protein microtubules," *Current Applied Physics*, vol. 11, pp. 1133-1138, 2011.
- [62] S. Akavci and A. Tanrikulu, "Buckling and free vibration analyses of laminated composite plates by using two new hyperbolic shear-deformation theories," *Mechanics of Composite Materials*, vol. 44, p. 145, 2008.
- [63] M. Benatta, I. Mechab, A. Tounsi, and E. A. Bedia, "Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects," *Computational Materials Science*, vol. 44, pp. 765-773, 2008.

- [64] C. W. Bert, S. Jang, and A. Striz, "Nonlinear bending analysis of orthotropic rectangular plates by the method of differential quadrature," *Computational Mechanics*, vol. 5, pp. 217-226, 1989.
- [65] Y. S. Al Rjoub and A. G. Hamad, "Free vibration of functionally Euler-Bernoulli and Timoshenko graded porous beams using the transfer matrix method," *KSCE Journal of Civil Engineering*, vol. 21, pp. 792-806, 2017.
- [66] A. C. Eringen, "Nonlocal polar elastic continua," *International journal of engineering science*, vol. 10, pp. 1-16, 1972.
- [67] E. Reissner, "ON TRANVERSE BENDING OF PLATES, INCLUDING THE EFFECT OF TRANSVERSE SHEAR DEFORMATION," 1974.
- [68] G. Shi, "A new simple third-order shear deformation theory of plates," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, pp. 4399-4417, 2007.
- [69] H.-T. Thai and T. P. Vo, "Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 62, pp. 57-66, 2012.
- [70] T. P. Vo, H.-T. Thai, T.-K. Nguyen, F. Inam, and J. Lee, "A quasi-3D theory for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams," *Composite Structures*, vol. 119, pp. 1-12, 2015.
- [71] P. Malekzadeh and S. Monajjemzadeh, "Dynamic response of functionally graded beams in a thermal environment under a moving load," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 23, pp. 248-258, 2016.
- [72] T.-K. Nguyen and B.-D. Nguyen, "A new higher-order shear deformation theory for static, buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich beams," *Journal of Sandwich Structures & Materials*, vol. 17, pp. 613-631, 2015.
- [73] N. Wattanasakulpong, B. G. Prusty, and D. W. Kelly, "Thermal buckling and elastic vibration of third-order shear deformable functionally graded beams," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, pp. 734-743, 2011.
- [74] L. C. Trinh, T. P. Vo, H.-T. Thai, and T.-K. Nguyen, "An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads," *Composites Part B: Engineering*, vol. 100, pp. 152-163, 2016.
- [75] F. Ebrahimi and E. Salari, "Nonlocal thermo-mechanical vibration analysis of functionally graded nanobeams in thermal environment," *Acta Astronautica*, vol. 113, pp. 29-50, 2015.
- [76] S. Esfahani, Y. Kiani, and M. Eslami, "Non-linear thermal stability analysis of temperature dependent FGM beams supported on non-linear hardening elastic foundations," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 69, pp. 10-20, 2013.
- [77] F. Ebrahimi and M. R. Barati, "A unified formulation for dynamic analysis of nonlocal heterogeneous nanobeams in hygro-thermal environment," *Applied Physics A*, vol. 122, p. 792, 2016.

- [78] M. Eltaher, S. A. Emam, and F. Mahmoud, "Free vibration analysis of functionally graded size-dependent nanobeams," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, pp. 7406-7420, 2012.
- [79] T.-K. Nguyen, B.-D. Nguyen, T. P. Vo, and H.-T. Thai, "Hygro-thermal effects on vibration and thermal buckling behaviours of functionally graded beams," *Composite Structures*, vol. 176, pp. 1050-1060, 2017.

**ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED SANDWICH BEAMS UNDER
HYGRO – THERMO – MECHANICAL LOADS**

NGUYEN BA DUY

DISSERTATION

Submitted to Ho Chi Minh City University of Technology and Education

in partial fulfillment of the requirements

for the degree of

Abstract

Doctor of Philosophy

2019

MAJOR : ENGINEERING MECHANICS

Ho Chi Minh city, September 2019

Chapter 1 General Introduction

1.1 Introduction and Objectives

Due to high stiffness-to-weight and strength-to-weight ratios, composite materials have been commonly used in many engineering fields such as aerospace (Figure. 1.1), mechanical engineering, construction, etc. Composite structures can be categorized into two main types: laminated composite structures and functionally graded ones. Laminated composite structures are ones made of laminae bonded together at the interfaces of layer in which their fibre orientations can be changed to meet structural performances. The disadvantage of these structures is material discontinuity at the interfaces of layer, that can lead to the stress concentration and delamination effects. To overcome this adverse, the functionally graded structures have been developed in which the properties of constituent materials vary continuously in a required direction and there thus is no interfacial effect. However practically, this material has difficulties in processing.

Potential applications of the composite materials in the engineering fields led to the development of composite structure theory. The composite beams are one of the most important structural components of the engineering structures which attracted many researches with different theories, numerical and analytical approaches, only some representative references are herein cited.

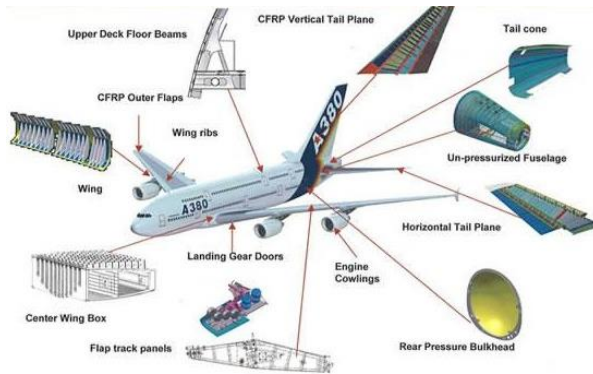


Figure 1.1 Application of composite materials in engineering

<https://tantracomposite.com/>

For composite beam models, a literature review on the composite beam theories can be seen in the previous works of Ghugal and Shimpi [1], Sayyad and Ghugal [2]. Many beam theories have been developed in which it can be divided into three main categories: classical theory, first-order shear deformation theory, higher-order shear deformation theory. The classical theory neglects transverse

shear strain effects and therefore it is only suitable for thin structures. In order to overcome this problem, the first-order shear deformation theory accounts for the transverse shear strain effect, however it requires a shear correction factor to correct inadequate distributions of the transverse shear stresses through its thickness [3, 4]. The higher-order shear deformation theory predicts more accurate than the other theories due to their appropriate distribution of transverse shear stresses. However, the accuracy of this theory depends on the choice of higher-order shape functions [5, 6]. In addition, several other authors proposed higher-order shear deformation models and techniques to reduce number of field variables. This approach led to refined higher-order shear deformation theories which are a priori efficient and simple [7-9]. It can be seen that the development of simple and efficient composite beam models is a significant topic interested by many researchers. Moreover, when the behaviors of beam are considered at a small scale, the experimental studies showed that the size effect is significant to be accounted, that led to the development of Eringen's nonlocal elasticity theory [10] to account for scale effect in elasticity, was used to study lattice dispersion of elastic waves, wave propagation in composites, dislocation mechanics, fracture mechanics and surface tension fluids. After this, Peddieson et al. [11] first applied the nonlocal continuum theory to the nanotechnology in which the static deformations of beam structures were obtained by using a simplified nonlocal beam model based on the nonlocal elasticity theory of Eringen [10] and the modified couple stress theory (MCST), which was developed by Yang et al. [12] by modifying the classical couples stress theory [13-16], is advantageous since it requires only one additional material length scale parameter together with two from the classical continua. This feature was presented by the theoretical framework in [12] which proved that the antisymmetric part of curvature does not appear explicitly in the strain energy. Based on this approach, several studies have been investigated and applied for analysis of composite microbeams and nanobeams [17-19]. Due to the difficulty in introducing the constitutive equations of microbeams into the energy functional, it is observed from the literature on microbeams that the effect of boundary conditions on the behaviors of microbeams are still limited.

For computational methods, many computational methods have been developed in order to predict accurately responses of composite structures with analytical and numerical approaches. For analytical approaches, Navier procedure can be seen as the simplest one in which the displacement variables are approximated under trigonometric shape functions that satisfy the boundary conditions (BCs). Although this method is only suitable for simply supported BCs, it has widespread used by many authors by its simplicity [20, 21]. Alternatively, the Ritz method is the most general one which accounts for various BCs. However, the accuracy of this approach requires an accurate choice of the approximate shape functions. The shape functions can be satisfied the BCs, conversely a

penalty method can be used to incorporate the BCs. Several previous works developed the Ritz-type solution method with trigonometric, exponential and polynomial shape functions for analysis of composite beams [22-24]. Other analytical approaches have been investigated for analysis of composite beams and plates such as differential quadrature method (DQM) by Bellman and Casti [25] that applied successfully for solving nonlinear differential equations system and for behavior analysis of composite beams [26, 27]. Moreover, due to the limitation of analytical method in practical applications, especially for complex geometries, numerical methods have been developed with various degrees of success in which the finite element method (FEM) is the most popular one which attracted a number of researches for behavior analysis of composite beams [7, 28, 29]. In practice, the FEM has difficulties to conveniently construct conformable plate elements of high-order as required for thin beam and plates, and to overcome the stiffness excess phenomena characterizing the shear-locking problem. Other numerical approaches can be considered for analysis of composite beams such as meshless method [30, 31], isogeometric finite element method [32, 33]. This literature survey indicates that a simple and efficient computational method for behavior analysis of composite beams is also an interesting topic.

In Vietnam, the behavior analysis of composite structures has attracted a number of researches, only some representative research groups are cited. Research group of Nguyen Xuan Hung *et al.* at the Hutech University [34-36]. Nguyen Thoi Trung *et al.* at the Ton Duc Thang University [37-39]. These groups of computational mechanic's focus on the development of advanced numerical methods such as the FEM, S-FEM, meshless method, isogeometry method and optimization theory of structures. Nguyen Dinh Duc *et al.* [40-43] developed analytical methods for analysis of composite plates and shells with various geometric shapes and loading conditions. Tran Ich Thinh *et al.* [44, 45] carried out some experimental studies on composite structures. Hoang Van Tung *et al.* [46, 47] studied responses of functionally graded plates and shells under thermo-mechanical loads. Nguyen Dinh Kien *et al.* [48, 49] investigated behaviors of functionally graded beams by the FEM under some different geometric and loading conditions. Group of GACES at HCMC University of Technology and Education developed analytical and numerical methods for analysis of composite beams, plates and shells, beam and plate models under hygro-thermo-mechanical loads [50-52].

A literature review on the behaviors of composite beams showed that the following points are necessary to be developed "ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED SANDWICH BEAMS UNDER HYGRO – THERMO – MECHANICAL LOADS".

1.2 Objective and novelty of the thesis

The object of this thesis is to propose some beam models for static, buckling and vibration analysis of functionally graded isotropic and sandwich beams embedded in hygro-thermo-mechanical environments.

The outline of this objective is followed:

- Novel general higher-order shear deformation beam theories are developed for analysis of functionally graded isotropic and sandwich beams. It is derived from the fundamental of elasticity theory.
- Develop a functionally graded microbeam and nanobeam model with various boundary conditions
- Develop a novel hybrid shape function for studying FG beams with different boundary conditions
- Develop finite element solution for analysis of functionally graded beams with different boundary conditions

1.3 Thesis outline

This thesis contains 7 chapters to describe the whole procedure of development and investigation, which is structured as follows:

Chapter 1: The objective of this chapter is to introduce a brief literature review on computational theories and methods of composite beams, from which several novel findings are found and proposed.

Chapter 2: It presents more details of the composite materials, its microstructure and method of estimating the effective elastic properties. A literature review also focuses on the topics that are relevant to this research such as beam theories, analytical and numerical approaches for bending, buckling and vibration analysis of beams in hygro-thermo-mechanical environment.

Chapter 3: This chapter proposes a novel general higher-order shear deformation beam theory for analysis of functionally graded beams. A general theoretical formulation of higher-order shear deformation beam theory is derived from the fundamental of two-dimensional elasticity theory and then novel different higher-order shear deformation beam theories are obtained. Moreover, two other beam models are also proposed. A HSBT model with a new inverse hyperbolic-sine higher-order shear function and a novel three-variable quasi-3D shear deformation beam theory for analysis of functionally graded beams are proposed.

Chapter 4: This chapter investigates effects of moisture and temperature rises on vibration and buckling responses of functionally graded beams. The present work is based on a higher-order shear deformation theory which accounts for a hyperbolic distribution of both in-plane and out-of-plane displacements. The temperature and moisture are supposed to be varied uniformly, linearly and non-linearly.

Chapter 5: This chapter proposes the effects of scale-size on the buckling and vibration behaviors of functionally graded beams in thermal environments. A

Composite materials are classified into two main categories depending on the type, geometry, orientation and arrangement of the reinforcement phase: particulate composites and fiber composites (Figure. 2.1). Particulate composites compose of particles of various sizes and shapes randomly dispersed within the matrix, which can be therefore regarded as quasi homogeneous on a scale larger than the particle size. Fiber composites are composed of fibers as the reinforcing phase whose form is either discontinuous (short fibers or whiskers) or continuous (long fibers). Fibers arrangement and their orientation can be customized for required performances. Recently, one of the potential applications of fiber composite materials is used carbon nanotubes (CNTs) composites added into polymer matrix to fabricate polymer matrix nanocomposites which presents a new generation of composite materials. In practice, CNTs are tiny tubes with diameters of a few nanometers and lengths of several microns made of carbon atoms. CNTs have been used in various fields of applications in last decade due to their high physical, chemical and mechanical properties. The development of composite materials with different processing methods led to the birth of multilayered structures which compose of thin layers of different materials bonded together (Figure. 2.2a). However practically, the main disadvantages of such an assembly is to create a material discontinuity through the interfaces of layers along which stress concentrations may be high, more specifically when high temperatures are involved. It can result in damages, cracks and failures of the structure. One way to overcome this adverse is to use functionally graded materials within which material properties vary continuously. The concept of functionally graded material (FGM) was proposed in 1984 by the material scientists in the Sendai area of Japan [53].

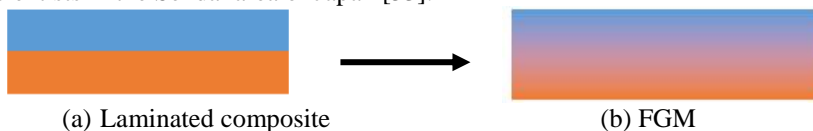


Figure 2.2 Laminated composite and functionally graded materials

Functionally graded materials: FGMs are advanced composite materials whose properties vary smoothly and continuously in a required direction (Figure. 2.2b). This new material overcomes material discontinuity found in laminated composite materials and therefore presents a large potential application. The earliest FGMs were introduced by Japanese scientists as ultra-high temperature resistant materials for aerospace applications and then spread in electrical devices, energy transformation, biomedical engineering, optics, etc.([54, 55]). FGMs are actually applied to many engineering fields such as cutting tools, machine parts, and engine components, incompatible functions such as heat, moisture, wear, and corrosion resistance plus toughness, etc. (Figure. 2.3).

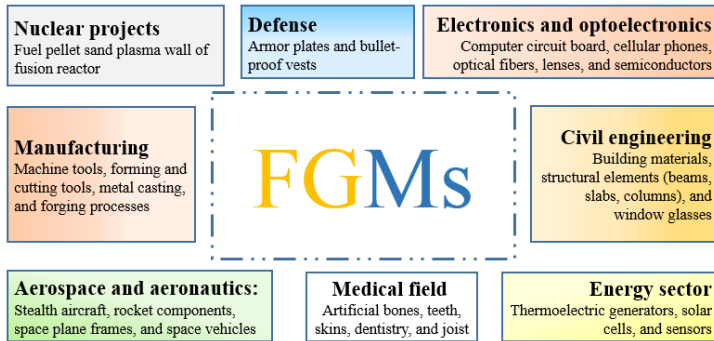


Figure 2.3 Potentially applicable fields for FGMs [55].

The earliest purpose of FGM development is to produce extreme temperature resistant materials so that ceramics are used as refractories and mix with other materials. In practice, the ceramics cannot be themselves used to make engineering structures subjected to high amounts of mechanical loads. It is due to its poor property in toughness. In the other cases, the metals and polymers are good at toughness and therefore used to mix with ceramics in order to combine the advantages of each material.

An example of FGMs used for a re-entry vehicle is shown in Fig. 2.4. The FGMs can be used to produce the shuttle structures. The heat source is created by the air friction of high velocity movement. If the structures of the vehicle are made from FGMs, the hot air flow is blocked by the outside surface of ceramics and transfers slightly into the lower surface. Consequently, the temperature at the lower surface is much reduced, which therefore prevents or minimizes structural damage due to thermal stresses and thermal shock.

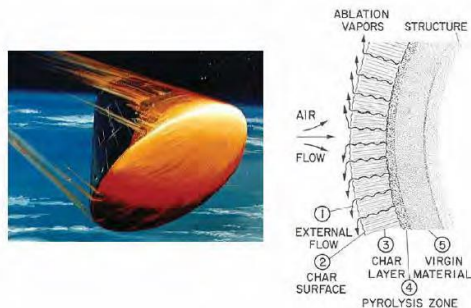


Figure 2.4 An example of FGM application for aerospace engineering.

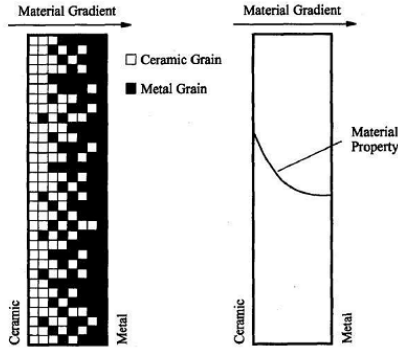
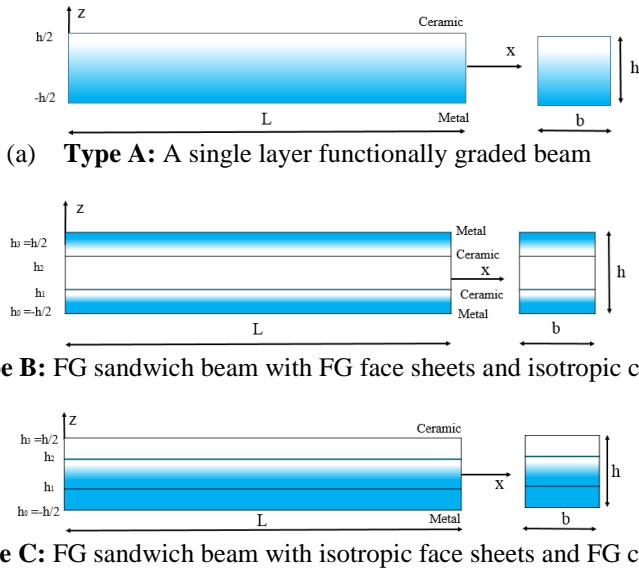


Figure 2.5 A discrete and continuous model of FG material [56].

2.2 Homogenized elastic properties of functionally graded beams

2.2.1 Functionally graded sandwich beams

The variation of material properties of the FGM can be expressed in term of the volume fraction of constituent materials under following forms: power-law function. In order to detail these material distributions, FG beams with length L and section $b \times h$ are considered. It is composed of ceramic and metal materials whose properties vary continuously through the beam thickness. Four types of FG beams are investigated in Fig. 2.6.



(a) Type A: A single layer functionally graded beam

(b) Type B: FG sandwich beam with FG face sheets and isotropic core.

(c) Type C: FG sandwich beam with isotropic face sheets and FG core.

Figure 2.6 Geometry and coordinate systems of FG sandwich beams.

2.2.2 Power function

In this rule, the effective property of FGM can be approximated based on an assumption that a composite property is the volume weighted average of the properties of the constituents. The power-law for the material gradation was first introduced by Wakashima et al. [57]. Furthermore, this law is widely used by many researchers for the modeling and analysis of FG sandwich beams. The law follows linear rule of mixture and properties are varying across the dimensions of FG beam.

The power-law for FG beam graded across the thickness:

$$P(z) = (P_c - P_m)V(z) + P_m \quad (2.1)$$

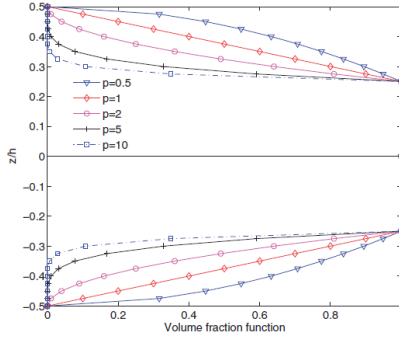


Figure 2.7 The volume fraction function $v(z)$ for the power-law (type B).

- **Type A:** The volume fraction function for single layer FG beam

$$V(z) = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^p \quad \text{v} \acute{o}i \quad z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \quad (2.2)$$

- **Type B:** The volume fraction function for sandwich beam with FG face sheets

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0} \right)^p; & z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = 1; & z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3} \right)^p; & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (2.3)$$

- **Type C:** The volume fraction function for sandwich beam with FG core

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = 0; & z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = \left(\frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^p; & z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = 1; & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (2.4)$$

2.3 Hygral and thermal variations in FG beams

It is known that the rise of temperature and moisture influence to behaviors of the FG beams. In order to investigate these effects, many earlier works have been realized as mentioned in Section 2.1 in which it can be distinguished into three following different case: uniform moisture and temperature rise, linear moisture and temperature rise, nonlinear moisture and temperature rise.

2.3.1 Uniform moisture and temperature rise

The temperature and moisture are supposed to vary uniformly in the beam and increased from a reference T_0 and C_0 , thus their current values of temperature and moisture are respectively followed [58].

$$T = T_0 + \Delta T, \quad C = C_0 + \Delta C \quad (2.5)$$

where T_0 and C_0 are reference temperature and moisture, respectively, which are supposed to be at the bottom surface of the beam.

2.3.2 Linear moisture and temperature rise

The temperature and moisture are linearly increased as follows [59].

$$T(z) = (T_t - T_b) \left(\frac{2z + h}{2h} \right) + T_b, \quad C(z) = (C_t - C_b) \left(\frac{2z + h}{2h} \right) + C_b \quad (2.6)$$

where T_t and T_b are temperatures as well as C_t and C_b are moisture content at the top and bottom surfaces of the beam.

2.3.3 Nonlinear moisture and temperature rise

The temperature and moisture are varied nonlinearly according to a sinusoidal law [60] as follows.

$$T(z) = (T_t - T_b) \left[1 - \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{2z + h}{2h} \right) \right] + T_b, \quad C(z) = (C_t - C_b) \left[1 - \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{2z + h}{2h} \right) \right] + C_b \quad (2.7)$$

In addition, the temperature distribution obtained from Fourier equation of steady-state one-dimensional heat conduction is also considered:

$$T(z) = T_b + \frac{T_t - T_b}{\int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{k(z)} dz} \int_{-h/2}^z \frac{1}{k(z)} dz \quad (2.8)$$

2.4 Theories for behavior analysis of FG beams

The kinematics of FG beams can be represented by using the higher-order shear deformation beam theories (HSDTs).

2.4.1 The higher-order shear deformation beam theories

A common used HSBT is expressed as followed:

$$u_1(x, z, t) = u(x, t) - zw_{,x}(x, t) + f(z)\theta(x, t); u_3(x, z, t) = w(x, t) \quad (2.9)$$

where $f(z)$ is the shear stress function

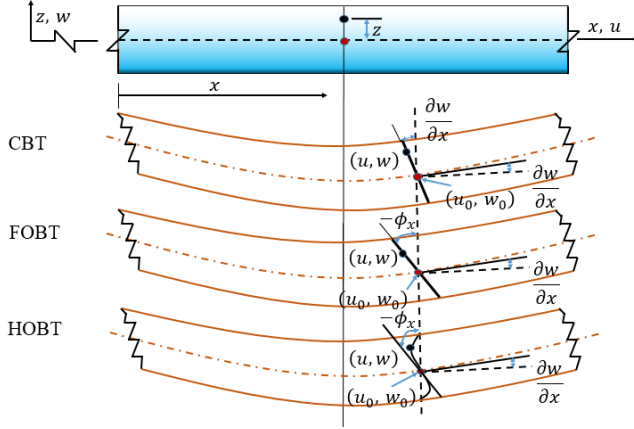


Figure 2.8 Kinematics of the CBT, FOBT, HOBT

Moreover, when the transverse displacement is decomposed into bending part $w_b(x, t)$ and shear one $w_s(x, t)$, a refined HSBT is obtained:

$$\begin{aligned} u_1(x, z, t) &= u(x, t) - zw_{b,x}(x, t) + (f(z) - z)w_{s,x}(x, t) \\ u_3(x, z, t) &= w_b(x, t) + w_s(x, t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

where $f(z)$ is the shearing stress function assigned according to realistic distribution of transverse shearing stress through the thickness of the beam.

2.4.2 Quasi-3D beam theory

In order to calculate effects of transverse normal stress and to predict more accurate behaviors of FG beams. A spread form of the HSBT is developed in which the transverse displacement is expressed in term of higher-order shear shape function so that the effect of transverse normal strain is captured. Based on this kinematic, a unified displacement field of higher order beam theory (quasi 3D beam theory) is established as follows:

$$\begin{aligned} u_1(x, z, t) &= u(x, t) - zw_{,x} + f(z)\theta(x, t) \\ u_3(x, z, t) &= w(x, t) + g(z)w_z(x, t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

where the comma indicates partial differentiation with respect to the coordinate subscript that follows; u, w, θ_x and w_z are four variables to be determined.

2.4.3 Review of the shear functions

A. Shear stresses in the rectangular beams

It is well known that the transverse shear stress of a rectangle section homogeneous beam is expressed by the following expression:

$$\sigma_{xz}(x, z) = \frac{QS_y}{bI_y} \quad (2.12)$$

where Q is the transverse shear force; $I_y = \frac{bh^3}{12}$ is moment of inertia of the section; b is the width of the cross section; S_y is section modulus of an area which is calculated as follows:

$$S_y = \int_{z_1}^c zdA = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z_1^2 \right) \quad (2.13)$$

Substituting Eq. (2.13) into Eq. (2.12) leads to the expression of the transverse shear stress at any given point z as follows:

$$\sigma_{xz}(x, z) = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - z_1^2 \right) \quad (2.14)$$

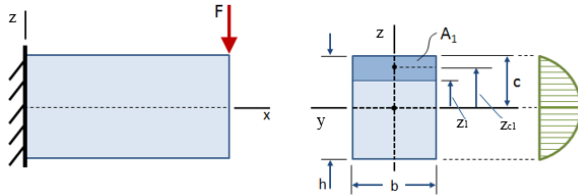


Figure 2.9 The shear stress varies over the height of the cross section

The variation of transverse shear stress through the beam depth is displaced in Figure 2.9 in which it can be seen from this figure and Eq. (2.14) that it satisfies the traction-free boundary conditions at the top and bottom surfaces of the beam and that the shear stress varies in terms of a second-order polynomial of z . Furthermore, if the displacement fields of the beams given in Eqs. (2.9, 2.10) are considered, the shear functions of the homogeneous beams should be a third-order polynomial.

B. Review of the shear functions

This topic has attracted many researches with the choice of different polynomial and non-polynomial shear functions. Table 2.1 summarises some representative the shear functions.

Table 2.1 Shear function $f(z)$

Model	$f(z)$
Polynomial function:	
Reddy[61], Murthy[62], Levinson [42]	$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Kaczkowski [63], Reissner [64], Panc [65]	$f(z) = z \left(\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2} \right)$
Ambartsumian [22]	$f(z) = \frac{h^2}{8} z - \frac{z^3}{6}$
Trigonometric function:	
Nguyen et al. [66]	$f(z) = \cot^{-1} \left(\frac{h}{z} \right) - \frac{16z^3}{15h^3}$
Nguyen et al. [22]	$f(z) = h \tan^{-1} \left(\frac{rz}{h} \right) - \frac{16rz^3}{3h^2(r^2 + 4)}; r = 1$
Touratier[67], Levy[64], Stein[68]	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$
Exponential function:	
Karama et al.[69]	$f(z) = ze^{-2(z/h)^2}$
Hyperbolic function:	
Soldatos[61]	$f(z) = h \sinh \left(\frac{z}{h} \right) - z \cosh \left(\frac{1}{2} \right)$
Akavci[65]	$f(z) = \frac{3\pi}{2} \operatorname{htanh} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{3\pi}{2} z \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \right)$

C. New of the shear functions

The idea of setting the shear function:

- Continuous function
- The deformed face is a curved face.
- Satisfy the free condition of the shear stress at the upper and lower boundary of the beam.
- A 3rd – order polynomial to account for homogeneity of the beam while another function used for gradient properties of the FGM.

Therefore, the form function is selected in the following form:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = f_1(z) + \xi z^3 \quad (2.15)$$

where the coefficient ξ are constants.

In Eq. 2.15, $f_2(z)$ is a 3rd – order polynomial to account for homogeneity of the beam, and $f_1(z)$ is a function used for gradient properties of the FGM.

A novel higher-order shear function is proposed as follows:

$$f(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{rz}{h}\right) - \frac{8rz^3}{3h^3\sqrt{r^2+4}} \quad (2.16)$$

and its derivative is expressed by:

$$g(z) = \frac{r}{\sqrt{r^2z^2+h^2}} - \frac{8rz^2}{h^3\sqrt{r^2+4}} \quad (2.17)$$

where a parameter r is introduced, namely correction parameter which enables to correct the solutions of FG beams.

2.4.4 Nonlocal elasticity and modified couple stress beam theories

Nonlocal elasticity beam theory: the experimental studies recently showed that when the behaviors of beams are considered at a small scale, the size effect is significant to be accounted. Several theories have been developed in which it can be united into Eringen's nonlocal elasticity theory, strain gradient theory, modified couple stress with different degrees of success. Based on the Eringen's nonlocal elasticity theory [70], nonlocal constitutive equations are expressed by:

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij} = t_{ij} \quad (2.18)$$

where ∇ denotes Laplacian operator; $\mu = (e_0 a)^2$ is parameter of scale length that considers the influences of small size on the response of nanostructures with e_0 is a constant appropriate to each material, a is an internal characteristics length (e.g., latticeparameter, granular distance) and t_{ij} are global stresses. The constitutive equations of FG nano beams are hence written under the following expressions:

$$\sigma_x - \mu \sigma_{x,xx} = \bar{Q}_{11}(z) \varepsilon_x; \quad \sigma_{xz} - \mu \sigma_{xz,xx} = \bar{Q}_{55}(z) \gamma_{xz} \quad (2.19)$$

Modified couple stress beam theory: According to the modified couple stress theory proposed by Yang et al. [12], the strain energy density is a function of both strain tensor (conjugated with stress tensor) and curvature tensor

(conjugated with couple stress tensor). Then, the strain energy in a deformed isotropic linear elastic body occupying a volume V can be written as

$$U_M = \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m} \boldsymbol{\chi}) dV \quad (2.20)$$

where $\boldsymbol{\sigma}$ is the stress tensor, $\boldsymbol{\varepsilon}$ is the strain tensor, \mathbf{m} is the deviatoric part of the couple stress tensor, and $\boldsymbol{\chi}$ is the symmetric curvature tensor. These tensors are defined by

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{m} = 2l^2 \mu \boldsymbol{\chi} \quad (2.22)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (2.23)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2} [\nabla \boldsymbol{\theta} + (\nabla \boldsymbol{\theta})^T] \quad (2.24)$$

where \mathbf{u} is the displacement vector, λ and μ are Lámé's constants, l is the material length scale parameter which reflects the effect of couple stress, and $\boldsymbol{\theta}$ is the rotation vector that can be expressed as

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} \text{curl } \mathbf{u} \quad (2.25)$$

Based on Eqs. (2.9) - (2.10), the angle of rotation around the coordinate axes x -, y -, z - is added into its kinematics as follows:

$$\theta_x(x, z, t) = \frac{1}{2} (u_{1,y} + u_{2,z}) = 0; \theta_z(x, z, t) = \frac{1}{2} (u_{2,x} - u_{1,y}) = 0 \quad (2.26)$$

$$\theta_y(x, z, t) = \frac{1}{2} (u_{1,z} + u_{3,x})$$

Substitution of Eq. (2.26) into (2.24) yields the following expression for the non-zero components of the symmetric curvature tensor

$$\chi_{xy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \quad \chi_{zy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial z}, \quad \chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi_{xz} = 0 \quad (2.27)$$

2.5 Analytical and numerical methods for analysis of FG beam

In this section, a literature on the use of analytical and numerical methods for the analysis of FG beams is reviewed.

2.5.1 Navier method

The displacement variables are approximated under trigonometric functions that satisfy the simply supported boundary conditions. For example, the displacement in Eqs. (2.9-2.10) as follows,

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^N u_j \cos \alpha_j x e^{i\omega t}, w(x, t) = \sum_{j=1}^N w_j \sin \alpha_j x e^{i\omega t}, \theta(x, t) = \sum_{j=1}^N \theta_j \cos \alpha_j x e^{i\omega t} \quad (2.28)$$

2.5.2 Ritz method

In order to avoid the limitations of Navier approach, various studies have been focused on the development of Ritz method for analysis of FG beams. Some representative previous works can be cited herein. Simsek [24] carried out static analysis of a FG simply supported beam subjected to a uniformly distributed load by using the Ritz method within the framework of Timoshenko and the higher order shear deformation beam theories. In this study, various material distributions on the displacements and the stresses of the FG beam are examined. Recently, Simsek [71] applied Euler–Bernoulli and Timoshenko beam models for the first time to investigate the buckling of beams composed of 2D functionally graded material (2D-FGM). Based on the Ritz method, the displacement variables are approximated as follows:

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^N \psi_j(x) u_j(t), w(x,t) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x) w_j(t), \theta(x,t) = \sum_{j=1}^N \psi_j(x) \theta_j(t) \quad (2.29)$$

2.5.3 Finite element method

Beam is represented as a (disjoint) collection of finite elements $\Omega = \bigcup_{\Omega_e \in \Omega} \Omega_e$ in

(Fig. 2.10).

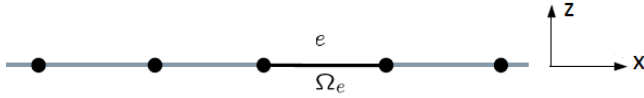


Figure 2.10 Discrete beams into finite elements.

On each element displacements and the test function are interpolated using shape functions and the corresponding nodal values.

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^n \psi_j(x) u_j, w(x,t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) w_j, \theta(x,t) = \sum_{j=1}^n \psi_j(x) \theta_j \quad (2.30)$$

where n is number of nodes per element, u_j, w_j, θ_j are nodal values of displacements; $\psi_j(x)$ and $\varphi_j(x)$ are the shape function of node j .

Linear shape function:

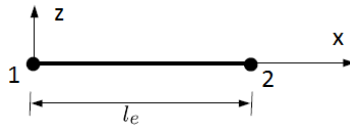


Figure 2.11 Linear shape functions for an element of length l_e

The linear shape function is the most polynomial for the 2-node beam element in Figure 2.11 is drawn from the two displacement conditions at the two nodes, written in the following form:

$$\psi_1(x) = 1 - \frac{x}{l_e}, \psi_2(x) = \frac{x}{l_e} \quad (2.31)$$

Hermite shape function:

Hermite shape function for beams is a 3rd – order polynomial which is approximated through the value of linear displacement in the z direction and its derivative at the nodes. It is given as follows:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{l_e}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l_e}\right)^3; \varphi_2(x) = x - \frac{2x^2}{l_e} + \frac{x^3}{l_e^2} \\ \varphi_3(x) &= 3\left(\frac{x}{l_e}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l_e}\right)^3; \varphi_4(x) = -\frac{x^2}{l_e} + \frac{x^3}{l_e^2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.6 Conclusions

This chapter focused on a review of literature on modeling techniques and solution methods for the bending, buckling, and vibration analysis of FG single layer and sandwich beams based on both lower order and higher order refined shear deformation theories. Following conclusions can be drawn based on the literature reviewed.

- ✚ Very few researchers contributed their efforts to obtain exact elasticity solutions for bending, buckling and free vibration analysis of single layer FG beams and sandwich beams with various boundary conditions; however, exact elasticity solutions for analysis of FG sandwich beams are not found in the literature.
- ✚ The exponential-law of property variation has been recognized convenient in solving elasticity problems by few researchers. However, exact elasticity solution for FG beam with variation of the material properties according to the power-law distribution is rarely available in the literature.
- ✚ In the whole literature, more attention is given to 1D analytical solution by using the Navier solution technique based on FSDT and HSDT neglecting transverse normal deformations. As far as the authors are aware, analytical solutions based on higher order theories considering effects of transverse shear and normal deformations (quasi-2D theories) are rarely available in the literature. Therefore, researchers can put their effort towards developing analytical solutions for FG sandwich beams based on refined quasi-2D theories.
- ✚ Significant research is available on the analysis of FG single layer and sandwich beams in which material properties are graded according to the power law; however, to the best of the authors' knowledge, there is limited reported work on the use of exponential law, sigmoid law, and Mori-Tanaka's law for the gradation of material.

- ✚ Despite of many works available on bending, buckling and free vibration analysis of single layer FG beams, studies on bending, buckling and free vibration analysis of FG sandwich beams with FG face sheets and isotropic core or isotropic face sheets and FG core are rare in the literature. It should be the main focus of researchers in the future research. Further, there is limited work reported in the literature on bending, buckling and free vibration analysis of single layer FG beams and sandwich beams with the effect hygro-thermal-mechanical loads.
- ✚ The studies related to some complex problem such as analytical solutions of 2D-FGM beams are very limited in the literature. Therefore, the numerical methods such as finite element method, Ritz method, etc. are widely used and have shown great progress for the analysis of complex problems such as 2D-FGM.

Chapter 3 Novel higher-order shear deformation theories for analysis of isotropic and functionally graded sandwich beams

3.1 Introduction

This chapter aims to present novel unified higher-order shear deformation theories for bending, buckling and free vibration analysis of FG sandwich beams in which a new general theoretical formulation based on the framework of elasticity theory, a new inverse hyperbolic-sine shape function for a higher-order shear deformation theory and a new three-variable quasi-3D beam theory are proposed. Variational functional of Hamilton and Lagrange are used to derive characteristic equations of motion, and then Navier and Ritz solution methods are applied to solve the problems. Three types of FG sandwich beams namely FG beams (Type A), FG faces and homogeneous ceramic core (type B) and FG core and homogeneous faces (Type C) are considered. Numerical results are compared with those from previous studies and to investigate effects of the material distribution, span-to-depth ratio, skin-core-skin thickness ratios and boundary conditions on the static, buckling and free vibration behaviors of FG sandwich beams.

3.2 Novel unified theoretical formulation of higher-order shear deformation beam theories

Consider a beam in Figure 2.1 with length L and cross-section $b \times h$. In order to derive a general kinetic displacement field of the beam, a plane stress problem in (x, z) - coordinate system is supposed.

The relations of strain – stress for two-dimensional problem are given by:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_z), \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x), \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\sigma_{xz} \quad (3.1)$$

where E, ν are Young's modulus and Poisson's ratio; G is shear modulus.

The linear relations of strains and displacements are expressed by:

$$\varepsilon_x = u_{,x}, \varepsilon_z = w_{,z}, \gamma_{xz} = u_{,z} + w_{,x} \quad (3.2)$$

where u, w are axial and transverse displacements, respectively; the comma indicates partial differentiation with respect to the coordinate subscript that follows. Substituting Eq. 3.2 into Eqs. 3.1 leads to:

$$u_{,x} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_z) \quad (3.3a)$$

$$w_{,z} = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x) \quad (3.3b)$$

$$u_{,z} + w_{,x} = \frac{1}{G}\sigma_{xz} \quad (3.3c)$$

By supposing that $\sigma_{xz}(x, z) = g_1(z)Q_x(x)$ where $Q_x(x)$ is transverse shear force, $g_1(z)$ is a shape function that satisfies the traction-free boundary conditions at the top and bottom surface of the beam. Integration Eq. 3.3b leads to:

$$w(x, z) = w_0(x) + \int_0^z \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x) dz \quad (3.4)$$

And then substituting Eq. (3.4) into Eq.(3.3c) leads to:

$$u_{,z} + w_{,x} = -w_{0,x}(x) - \int_0^z \frac{1}{E}(\sigma_{z,x} - \nu\sigma_{x,x}) dz + \frac{g_1(z)}{G}Q_x(z) \quad (3.5)$$

If the effect of the integral term is neglected, the integration of Eq. 3.5 leads to:

$$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + f_1(z)Q_x(x) \quad (3.6)$$

with $f_1(z) = g_1(z)/G$. Moreover, the equilibrium equations of the beams without volume forces are expressed by:

$$\sigma_{x,x} + \sigma_{xz,z} = 0, \sigma_{xz,x} + \sigma_{z,z} = 0 \quad (3.7)$$

from which by omitting the integral coefficients, the axial and normal transverse stresses are determined from the transverse shear stress as follows:

$$\sigma_x(x, z) = -g_1'(z)R_x(x), \sigma_z(x, z) = -g_2(z)Q_{x,x} \quad (3.8)$$

where,

$$R_x(x) = \int_0^x Q_x dx, g_2(z) = \int_0^z g_1(z) dz \quad (3.9)$$

Substituting Eqs. 3.8 into Eq. 3.4 leads to:

$$w(x, z) = w_0(x) - f_2(z)Q_{x,x} + f_3(z)R_x \quad (3.10)$$

where

$$f_2(z) = \int_0^z \frac{g_2(z)}{E} dz, f_3(z) = \int_0^z \frac{\nu g_1'(z)}{E} dz \quad (3.11)$$

A general formulation of the displacement field of the beam is finally obtained by Eqs. 3.6 and 3.10 as follows:

$$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + f_1(z)Q_x(x) \quad (3.12a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) - f_2(z)Q_{x,x} + f_3(z)R_x \quad (3.12b)$$

from which different HSBTs can be derived. It is noted that the expression given in 3.12 is a general displacement of the beam based on the elasticity theory in which both axial and transverse displacements are approximated in the beam thickness direction. If the effect of normal transverse strain is neglected, i.e.

$w(x, z) = w_0(x)$, Eqs. 3.12 becomes:

$$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + f_1(z)Q_x(x) \quad (3.13a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (3.13b)$$

Example 1: The material properties are supposed to be constant in the beam, the transverse shear force is assumed to be expressed as follows ([72]):

$$Q_x(x) = \frac{5Gh}{6}(\theta_x + w_{0,x}) \quad (3.14)$$

where θ_x is rotation at the mid-axis of the beam. Eqs. 3.13 lead to a novel general formulation of the HSBT as follows:

$$u(x, z) = u_0(x) + \left(\frac{5hg_2}{6} - z \right) w_{0,x} + \frac{5hg_2}{6} \theta_x(x) \quad (3.15a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (3.15b)$$

where it holds three variables u_0, w_0, θ_x and a higher-order shape function $g_2(z)$ defined in Eq. 3.9b. It is noted that the accuracy of the theory strictly depends on a choice of the shape function. For example, taking the shape function given by

Reissner [72]: $g_1(z) = \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)$, $g_2(z) = \frac{3}{2h} \left(z - \frac{4z^3}{3h^2} \right)$ into Eq. 3.15a

leads to:

$$u(x, z) = u_0(x) + \left(\frac{z}{4} - \frac{5z^3}{3h^2} \right) w_{0,x} + \left(\frac{5z}{4} - \frac{5z^3}{3h^2} \right) \theta_x(x) \quad (3.16a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (3.16b)$$

which is a HSBT proposed Reissner [72] and Shi [73] for analysis of plates. The earlier numerical results based on Eqs. 3.16 for the plates showed its accuracy and efficiency in predicting static and dynamic behaviors of the plates.

Another approach is supposed that the transverse shear force is expressed under the form:

$$Q_x(x) = G\theta_x \quad (3.17)$$

that leads to another HSBT which is commonly used by many researches:

$$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + g_2(z)\theta_x(x); w(x, z) = w_0(x) \quad (3.18)$$

Example 2: For functionally graded beams, the previous work of Nguyen et al. [3, 4] revealed that the transverse shear force is expressed by:

$$Q_x(x) = H(\theta_x + w_{0,x}) \quad (3.19)$$

where the improved shear stiffness is given by:

$$H = \left[\int_{-h/2}^{h/2} \frac{(\bar{b}A_z + \bar{d}B_z)^2}{G} dz \right]^{-1} \text{ with } A_z = \int_{-h/2}^z Q_{11}(\xi) d\xi, B_z = \int_{-h/2}^z Q_{11}(\xi) d\xi \quad (3.20)$$

and \bar{b} , \bar{d} are components of the compliance matrix (see [4] for more details). Substituting Eq. 3.19 into Eq. 3.13a leads to another novel HSBT as follows:

$$u(x, z) = u_0(x) + [Hf_1(z) - z]w_{0,x} + Hf_1(z)\theta_x(x) \quad (3.21a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (3.21b)$$

Example 3: In order to consider the effect of transverse normal strain, the general form of the transverse displacement in Eq. 3.12b should be considered in which for simplicity purpose, the effect of normal stress can be neglected, that leads to:

$$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + f_1(z)Q_x(x) \quad (3.22a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) + f_3(z)R_x \quad (3.22b)$$

which is a general form of quasi-3D beam theory. For the shear force given in Eq. 3.17 and the material properties are supposed to a priori constant, a common quasi-3D beam theory is recovered:

$$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + g_2(z)\theta_x(x) \quad (3.23a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) + \frac{\nu}{2(1+\nu)} g_1(z)w_z(x) \quad (3.23b)$$

where $w_z(x) = \int_0^x (\theta_x + w_{0,x}) dx$. If the term $\frac{\nu}{2(1+\nu)}$ is neglected, the displacement field in Eqs. 3.23 is commonly used by many researches.

$$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + g_2(z)\theta_x(x) \quad (3.24a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) + g_1(z)w_z(x) \quad (3.24b)$$

Similarly, if the transverse shear force is taken as Eq. 3.14, a new quasi-3D beam theory is obtained as follows:

$$u(x, z) = u_0(x) + \left(\frac{5hg_2}{6} - z \right) w_{0,x} + \frac{5hg_2}{6} \theta_x(x) \quad (3.25a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) + \frac{5\nu h}{12(1+\nu)} g_1(z) w_z(x) \quad (3.25b)$$

Moreover, if the expression of the transverse shear force in Eq. 3.19 is considered for functionally graded beams, another novel quasi-3D beam theory is obtained as follows:

$$u(x, z) = u_0(x) + [Hf_1(z) - z] w_{0,x} + Hf_1(z) \theta_x(x) \quad (3.26a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) + Hf_3(z) w_z(x) \quad (3.26b)$$

Some novel beam models based on the higher-order shear deformation theory with higher-order variations of axial displacement or both axial and transverse displacements are summarized in Table 3.1.

Table 3.1 Unified higher-order shear deformation theories

Name	Kinematics
HSBT1	$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + g_2(z)\theta_x(x)$ $w(x, z) = w_0(x)$
HSBT2	$u(x, z) = u_0(x) + \left(\frac{5hg_2}{6} - z \right) w_{0,x} + \frac{5hg_2}{6} \theta_x(x)$ $w(x, z) = w_0(x)$
HSBT3	$u(x, z) = u_0(x) + [Hf_1(z) - z] w_{0,x} + Hf_1(z) \theta_x(x)$ $w(x, z) = w_0(x)$
Quasi-3D0	$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + g_2(z)\theta_x(x)$ $w(x, z) = w_0(x) + g_1(z)w_z(x)$

Quasi-3D1

$$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}z + g_2(z)\theta_x(x)$$

$$w(x, z) = w_0(x) + \frac{\nu}{2(1+\nu)}g_1(z)w_z(x)$$

Quasi-3D2

$$u(x, z) = u_0(x) + \left(\frac{5hg_2}{6} - z\right)w_{0,x} + \frac{5hg_2}{6}\theta_x(x)$$

$$w(x, z) = w_0(x) + \frac{5vh}{12(1+\nu)}g_1(z)w_z(x)$$

Quasi-3D3

$$u(x, z) = u_0(x) + [Hf_1(z) - z]w_{0,x} + Hf_1(z)\theta_x(x)$$

$$w(x, z) = w_0(x) + Hf_3(z)w_z(x)$$

Furthermore, the transverse displacement can be decomposed into a bending part and shear one: $w_0(x) = w_0^b(x) + w_0^s(x)$ and by setting $\theta_x = -w_{0,x}^s$, the displacement field given in Examples 1-3 can be rewritten to formulate refined HSBTs as Table 3.2.

Table 3.2 Unified refined higher-order shear deformation theories

Name	Kinematics
RHSBT1	$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}^b z - g_2(z)w_{0,x}^s(x)$ $w(x, z) = w_0^b(x) + w_0^s(x)$
RHSBT2	$u(x, z) = u_0(x) + \left(\frac{5hg_2}{6} - z\right)w_{0,x}^b - \frac{5hg_2}{6}w_{0,x}^s(x)$ $w(x, z) = w_0^b(x) + w_0^s(x)$
RHSBT3	$u(x, z) = u_0(x) + [Hf_1(z) - z]w_{0,x}^b - Hf_1(z)w_{0,x}^s(x)$ $w(x, z) = w_0^b(x) + w_0^s(x)$
Rquasi-3D0	$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}^b z - g_2(z)w_{0,x}^s(x)$

$$w(x, z) = w_0^b(x) + w_0^s(x) + g_1(z)w_z(x)$$

Rquasi-3D1

$$u(x, z) = u_0(x) - w_{0,x}^b z - g_2(z)w_{0,x}^s(x)$$

$$w(x, z) = w_0^b(x) + w_0^s(x) + \frac{\nu}{2(1+\nu)}g_1(z)w_z(x)$$

Rquasi-3D2

$$u(x, z) = u_0(x) + \left(\frac{5hg_2}{6} - z\right)w_{0,x}^b - \frac{5hg_2}{6}w_{0,x}^s(x)$$

$$w(x, z) = w_0^b(x) + w_0^s(x) + \frac{5\nu h}{12(1+\nu)}g_1(z)w_z(x)$$

Rquasi-3D3

$$u(x, z) = u_0(x) + [Hf_1(z) - z]w_{0,x}^b - Hf_1(z)w_{0,x}^s(x)$$

$$w(x, z) = w_0^b(x) + w_0^s(x) + Hf_3(z)w_z(x)$$

3.3 Analysis of static, buckling and vibration of FG beams based on the HSBTs

In order to formulate varied functional of the FG beams based on the HSBTs proposed in Table 3.1, only the displacement field of **HSBT2** is chosen for details.

3.3.1 Kinematics, strains and stresses

The displacement field of the **HSBT2** is given by:

$$u(x, z) = u_0(x) + \bar{g}_1(z)w_{0,x} + \bar{g}_2(z)\theta_x(x), \quad w(x, z) = w_0(x) \quad (3.27)$$

where $\bar{g}_1(z) = 5hg_2/6 - z$, $\bar{g}_2(z) = 5hg_2/6$. The non-zeros strains associated to displacements in Eqs. 3.27 are expressed by:

$$\varepsilon_x(x, z) = u_{0,x}(x) + \bar{g}_1(z)w_{0,xx} + \bar{g}_2(z)\theta_{x,x}(x) \quad (3.28a)$$

$$\gamma_{xz}(x, z) = \frac{5hg_1}{6}(\theta_x + w_{0,x}) \quad (3.28a)$$

where $g_1(z) = g_2'(z)$ which is chosen under form: $g_1(z = \pm h/2) = 0$. The constitutive equations are therefore obtained as follows:

$$\sigma_x(x, z) = E\varepsilon_x(x, z) = E[u_{0,x}(x) + \bar{g}_1(z)w_{0,xx} + \bar{g}_2(z)\theta_{x,x}(x)] \quad (3.29a)$$

$$\sigma_{xz}(x, z) = G\gamma_{xz}(x, z) = \frac{5Ghg_1}{6}(\theta_x + w_{0,x}) \quad (3.29b)$$

It is noted from Eq. 3.29b that the transverse shear stress satisfies the traction-free boundary conditions on top and bottom surfaces of the beam.

3.3.2 Variation formulation

In order to derive the equations of motion of the beam, Hamilton's principle is used:

$$\int_0^T \delta(U + V - K) dT = 0 \quad (3.30)$$

where U, V, K are strain energy, work done by external force and kinetic energy of the beams. The variation of the strain energy is given by:

$$\delta U = \int_0^L \left[N_x \delta u_{0,x} + M_x^b \delta w_{0,xx} + M_x^s \delta \theta_{x,x} + Q_x (\delta \theta_x + \delta w_{0,x}) \right] dx \quad (3.31)$$

where the stress resultants N_x, M_x^b, M_x^s are defined by:

$$\left(N_x, M_x^b, M_x^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x (1, \bar{g}_1, \bar{g}_2) b dz, \quad Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{5hg_1(z)}{6} \sigma_{xz} b dz \quad (3.32)$$

which can be written under the explicit form as follows:

$$N_x = Au_{0,x} + Bw_{0,xx} + B^s \theta_{x,x} \quad (3.33a)$$

$$M_x^b = Bu_{0,x} + Dw_{0,xx} + D^s \theta_{x,x} \quad (3.33b)$$

$$M_x^s = B^s u_{0,x} + D^s w_{0,xx} + H^s \theta_{x,x} \quad (3.33c)$$

$$Q_x = A^s (\theta_x + w_{0,x}) \quad (3.33d)$$

where $A, B, D, B^s, D^s, H^s, A^s$ are the stiffness's of the beams defined by:

$$\left(A, B, B^s, D, D^s, H^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} E(z) (1, \bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_1^2, \bar{g}_1 \bar{g}_2, \bar{g}_2^2) b dz \quad (3.34a)$$

$$A^s = \int_{-h/2}^{h/2} G \left(\frac{5hg_1}{6} \right)^2 b dz \quad (3.34b)$$

The variation of work done by transverse load q and axial force N_x^0 is calculated by:

$$\delta V = - \int_0^L q \delta w_0 dx - \int_0^L N_x^0 w_{0,xx} \delta w_0 dx \quad (3.35)$$

The variation of kinetic energy is expressed by:

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V \rho \left[(\dot{u}_0 + \bar{g}_1 \dot{w}_{0,x} + \bar{g}_2 \dot{\theta}_x) (\delta \dot{u}_0 + \bar{g}_1 \delta \dot{w}_{0,x} + \bar{g}_2 \delta \dot{\theta}_x) + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dV \\ &= \int_0^L \left(I_0 \dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + I_1 \dot{u}_0 \delta \dot{w}_{0,x} + I_2 \dot{u}_0 \delta \dot{\theta}_x + I_1 \dot{w}_{0,x} \delta \dot{u}_0 + J_1 \dot{w}_{0,x} \delta \dot{w}_{0,x} \right. \\ &\quad \left. + K_1 \dot{w}_{0,x} \delta \dot{\theta}_x + I_2 \dot{\theta}_x \delta \dot{u}_0 + K_1 \dot{\theta}_x \delta \dot{w}_{0,x} + J_2 \dot{\theta}_x \delta \dot{\theta}_x + I_0 \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right) dx \end{aligned} \quad (3.36)$$

where the terms of inertia $I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_1$ are defined by:

$$(I_0, I_1, I_2, J_1, K_1, J_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left(1, \bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_1^2, \bar{g}_1 \bar{g}_2, \bar{g}_2^2 \right) b dz \quad (3.37)$$

Substituting Eqs. 3.31, 3.32 and 3.34 into Eq. 3.30, and then integrating by part the subsequence leads to the following equilibrium equations:

$$\delta u_0 : N_{x,x} = I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{w}_{0,x} + I_2 \ddot{\theta}_x \quad (3.38a)$$

$$\delta w_0 : M_{x,xx}^b - Q_{x,x} - q - N_x^0 w_{0,xx} = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \ddot{u}_{0,x} + J_1 \ddot{w}_{0,xx} + K_1 \ddot{\theta}_{x,x} \quad (3.38b)$$

$$\delta \theta_x : M_{x,x}^s - Q_x = I_2 \ddot{u}_0 + K_1 \ddot{w}_{0,x} + J_2 \ddot{\theta}_x \quad (3.38c)$$

Substituting Eqs. 3.33 into Eqs. 3.38 leads to:

$$A u_{0,xx} + B w_{0,xxx} + B^s \theta_{x,xx} = I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{w}_{0,x} + I_2 \ddot{\theta}_x \quad (3.39a)$$

$$B u_{0,xxx} + D w_{0,xxx} + D^s \theta_{x,xxx} - A^s (\theta_{x,x} + w_{0,xx}) - q - N_x^0 w_{0,xx} = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \ddot{u}_{0,x} + J_1 \ddot{w}_{0,xx} + K_1 \ddot{\theta}_{x,x} \quad (3.39b)$$

$$B^s u_{0,xx} + D^s w_{0,xxx} + H^s \theta_{x,xx} - A^s (\theta_x + w_{0,x}) = I_2 \ddot{u}_0 + K_1 \ddot{w}_{0,x} + J_2 \ddot{\theta}_x \quad (3.39c)$$

Eqs. 3.39 are equations of motion of the beam from which the bending, buckling and vibration responses of the beam can be obtained.

3.3.3 Navier solution

The Navier solution procedure is used to determine analytical solutions for simply-supported functionally graded beams. The solution is assumed to be of the form:

$$u_0(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m \cos \lambda x e^{i\omega t}, w_0(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \lambda x e^{i\omega t}, \theta_x(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \cos \lambda x e^{i\omega t} \quad (3.40)$$

where ω is the natural frequency, $i^2 = -1$ the imaginary unit, $\lambda = m\pi / L$. The transverse load $q(x)$ is also expressed as:

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \lambda x \quad (3.41)$$

where $q_m = 4q_0 / m\pi$ ($m = 1, 3, 5, \dots$, etc.) for uniformly distributed load with density q_0 . Assuming that the beam is subjected to an in-plane compressive load $N_{xx}^0 = -N^0$. Substituting Eqs. 3.40 and 3.41 into Eqs. 3.39, the following characteristic problem is obtained:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{q}_m \quad (3.42)$$

3.4 Analysis of static, buckling and vibration of FG beams based on the Quasi-3D

In order to formulate varied functional of the FG beams based on the quasi-3Ds proposed in Table 3.1, only the displacement field of **Quasi-3D2** is chosen for details.

3.4.1 Kinematics, strains and stresses

The displacement field of **Quasi-3D2** is given by:

$$u(x, z) = u_0(x) + \bar{g}_1(z)w_{0,x} + \bar{g}_2(z)\theta_x(x) \quad (3.43a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) + \frac{5\nu h}{12(1+\nu)}g_1(z)w_z(x) \quad (3.43b)$$

The non-zeros strains associated to displacements in Eqs. 3.43 are expressed by:

$$\varepsilon_x(x, z) = u_{0,x}(x) + \bar{g}_1(z)w_{0,xx} + \bar{g}_2(z)\theta_{x,x}(x) \quad (3.44a)$$

$$\varepsilon_z(x, z) = \frac{5\nu h}{12(1+\nu)}g_1'(z)w_z(x) \quad (3.44b)$$

$$\gamma_{xz}(x, z) = \frac{5hg_1}{6}[\theta_x + w_{0,x} + Gw_{z,x}] \quad (3.44c)$$

The constitutive equations are therefore obtained as follows:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{13} & 0 \\ Q_{13} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

Eqs. 3.44c and 3.45 show that the transverse shear stress satisfies the traction-free boundary conditions on top and bottom surfaces of the beam.

3.4.2 Variation formulation

In order to derive the equations of motion of the beam, Hamilton's principle is used:

$$\int_0^T \delta(U + V - K) dT = 0 \quad (3.46)$$

where U, V, K [are strain energy, work done by external force and kinetic energy of the beams. The variation of the strain energy is given by:

$$\delta U = \int_0^L [N_x \delta u_{0,x} + M_x^b \delta w_{0,xx} + M_x^s \delta \theta_{x,x} + R_z \delta w_z + Q_x (\delta \theta_x + \delta w_{0,x} + \delta w_{z,x})] dx \quad (3.47)$$

where the stress resultants N_x, M_x^b, M_x^s, R_z and Q_x are defined by:

$$\left(N_x, M_x^b, M_x^s\right) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(1, \bar{g}_1, \bar{g}_2) b dz \quad (3.48a)$$

$$R_z = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{5\nu h}{12(1+\nu)} g_1'(z) \sigma_z b dz \quad (3.48b)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{5h g_1(z)}{6} \sigma_{xz} b dz \quad (3.48c)$$

which can be written under the explicit form as follows:

$$N_x = Au_{0,x} + Bw_{0,xx} + B^s \theta_{x,x} + Xw_z \quad (3.49a)$$

$$M_x^b = Bu_{0,x} + Dw_{0,xx} + D^s \theta_{x,x} + Yw_z \quad (3.49b)$$

$$M_x^s = B^s u_{0,x} + D^s w_{0,xx} + H^s \theta_{x,x} + X^s w_z \quad (3.49c)$$

$$R_z = Xu_{0,x} + Yw_{0,xx} + X^s \theta_{x,x} + Y^s w_z \quad (3.49d)$$

$$Q_x = A^s (w_{0,x} + \theta_x + w_{z,x}) \quad (3.49e)$$

The variation of work done by transverse axial force N_x^0 is calculated by:

$$\delta V = - \int_0^L q \delta w_0 dx - \int_0^L N_x^0 w_{0,xx} \delta w_0 dx \quad (3.51)$$

The variation of kinetic energy is expressed by:

$$\begin{aligned} \delta K = & \int_0^L \left(I_0 \dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + I_1 \dot{u}_0 \delta \dot{w}_{0,x} + I_2 \dot{u}_0 \delta \dot{\theta}_x + I_1 \dot{w}_{0,x} \delta \dot{u}_0 + J_1 \dot{w}_{0,x} \delta \dot{w}_{0,x} \right. \\ & + K_1 \dot{w}_{0,x} \delta \dot{\theta}_x + I_2 \dot{\theta}_x \delta \dot{u}_0 + K_1 \dot{\theta}_x \delta \dot{w}_{0,x} + J_2 \dot{\theta}_x \delta \dot{\theta}_x + I_0 \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \\ & \left. + L_1 \dot{w}_0 \delta \dot{w}_z + L_1 \dot{w}_z \delta \dot{w}_0 + L_2 \dot{w}_z \delta \dot{w}_z \right) dx \end{aligned} \quad (3.52)$$

Substituting Eqs. 3.47, 3.51 and 3.52 into Eq. 3.46, and then integrating by part the subsequence leads to the following equilibrium equations:

$$\delta u_0 : N_{x,x} = I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{w}_{0,x} + I_2 \ddot{\theta}_x \quad (3.53a)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : M_{x,xx}^b - Q_{x,x} - q - N_x^0 w_{0,xx} \\ = I_1 \ddot{u}_{0,x} + J_1 \ddot{w}_{0,xx} + I_0 \ddot{w}_0 + K_1 \ddot{\theta}_{x,x} + L_1 \dot{w}_z \end{aligned} \quad (3.53b)$$

$$\delta \theta_x : M_{x,x}^s - Q_x = I_2 \ddot{u}_0 + K_1 \dot{w}_{0,x} + J_2 \ddot{\theta}_x \quad (3.53c)$$

$$\delta w_z : R_z - Q_x = L_1 \dot{w}_0 + L_2 \dot{w}_z \quad (3.53d)$$

Substituting Eqs. 3.49 into Eqs. 3.53 leads to:

$$Au_{0,xx} + Bw_{0,xxx} + B^s \theta_{x,xx} + Xw_{z,x} = I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{w}_{0,x} + I_2 \ddot{\theta}_x \quad (3.54a)$$

$$Bu_{0,xxx} + Dw_{0,xxx} + D^s \theta_{x,xxx} + Yw_{z,xx} - A^s (w_{0,xx} + \theta_{x,x} + w_{z,xx}) - q - N_x^0 w_{0,xx} = I_1 \ddot{u}_{0,x} + J_1 \ddot{w}_{0,xx} + I_0 \ddot{w}_0 + K_1 \ddot{\theta}_{x,x} + L_1 \dot{w}_z \quad (3.54b)$$

$$B^s u_{0,xx} + D^s w_{0,xxx} + H^s \theta_{x,xx} + X^s w_{z,x} - A^s (w_{0,x} + \theta_x + w_{z,x}) = I_2 \ddot{u}_0 + K_1 \ddot{w}_{0,x} + J_2 \ddot{\theta}_x \quad (3.54c)$$

$$Xu_{0,x} + Yw_{0,xx} + X^s \theta_{x,x} + Y^s w_z - A^s (w_{0,x} + \theta_x + w_{z,x}) = L_1 \dot{w}_0 + L_2 \dot{w}_z \quad (3.54d)$$

Eqs. 3.54 are equations of motion of the beam from which the bending, buckling and vibration responses of the beam can be obtained.

3.4.3 Navier solution

The Navier solution procedure is used to determine analytical solutions for simply-supported functionally graded beams. The solution is assumed to be of the form:

$$u_0(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m \cos \lambda x e^{i\omega t}, w_0(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \lambda x e^{i\omega t}, \theta_x(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \cos \lambda x e^{i\omega t} \quad (3.55)$$

where ω is the natural frequency, $i^2 = -1$ the imaginary unit, $\lambda = m\pi / L$. The transverse load $q(x)$ is also expressed as:

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \lambda x \quad (3.56)$$

where $q_m = 4q_0 / m\pi$ ($m=1,3,5,\dots$, etc.) for uniformly distributed load with density q_0 . Assuming that the beam is subjected to an in-plane compressive load $N_{xx}^0 = -N^0$. Substituting Eqs. 3.55 and 3.56 into Eqs. 3.54, the following characteristic problem is obtained:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{q}_m \quad (3.57)$$

3.5 The Geometry and power law

Consider an FG sandwich beam as shown in Figure. 2.6, which is made of a mixture of ceramic and metal, with length L and uniform section $b \times h$. In this chapter, several of numerical examples are analyzed in order to verify the accuracy of present studies and investigate the critical buckling loads and natural frequencies of isotropic and FG sandwich beams. Three types of FG beams (Types A, B and C) are constituted by a mixture of isotropic ceramic (Al_2O_3) and metal (Al). The material property distribution of FG sandwich beams through the beam depth is given by in section 2.21.

3.6 Analytical solutions

3.6.1 Ritz for solution 1

In order to derive the equations of motion, the solution field u, w, θ_x and w_z is approximated as the following forms:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{j=1}^m u_j \psi_j(x) e^{i\omega t}, w(x,t) = \sum_{j=1}^m w_j \varphi_j(x) e^{i\omega t} \\ \theta(x,t) &= \sum_{j=1}^m \theta_j \psi_j(x) e^{i\omega t}, w_z(x,t) = \sum_{j=1}^m w_{zj} \varphi_j(x) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.58)$$

where ω is the natural frequency of free vibration of the beam, $\sqrt{-1}$ the imaginary unit, $(u_j, w_j, \theta_j$ and $w_{zj})$ denotes the values to be determined, $\psi_j(x)$ and $\varphi_j(x)$ are the shape functions. To derive analytical solutions, the shape functions $\psi_j(x)$ and $\varphi_j(x)$ are chosen for various boundary conditions (S – S: Simply Supported, C-C: Clamped –Clamped, and C – F: Clamped – Free beams) as follows:

$$\psi_j(x) = x^{j-1}, \varphi_j(x) = x^{j-1} \quad (3.59)$$

In order to impose the various boundary conditions, the method of Lagrange multipliers can be used so that the Lagrangian functional of the problem is rewritten as follows:

$$\Pi^* = \Pi + \beta_i \hat{u}_i(\bar{x}) \quad (3.60)$$

where β_i are the Lagrange multipliers which are the support reactions of the problem, $\hat{u}_i(\bar{x})$ denote the values of prescribed displacement at location $\bar{x} = 0, L$. By substituting Eq. 3.60 into the equations of motion, and using Lagrange's equations:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (3.61)$$

with q_j representing the values of $(u_j, w_j, \theta_j, w_{zj}, \beta_j)$ that leads to:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (3.62)$$

where the components of the stiffness matrix \mathbf{K} and the mass matrix \mathbf{M} and the components of $\mathbf{K}^{15}, \mathbf{K}^{25}, \mathbf{K}^{35}$, and \mathbf{K}^{45} depend on number of boundary conditions.

3.6.2 Ritz for solution 2

Based on Ritz method, the displacement field is approximated in the following forms:

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^m \psi_j(x) u_j e^{i\omega t}, w_b(x,t) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) w_{bj} e^{i\omega t}, w_s(x,t) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) w_{sj} e^{i\omega t} \quad (3.63)$$

where ω is the frequency, $i^2 = -1$ the imaginary unit; u_j, w_{hj} , and w_{sj} are unknown and need to be determined; $\psi_j(x)$ and $\varphi_j(x)$ are Eqs. 3.59. In order to impose the various boundary conditions, the method of Lagrange multipliers can be used so that the Lagrangian functional of the problem is Eqs. 3.61. By substituting Eq. 3.64 into the equations of motion, and using Lagrange's Eq. 3.55, that leads to:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (3.64)$$

3.7 Numerical results and discussion

Several numerical examples are analyzed in this section to verify the accuracy of present study and investigate the deflections, stresses, natural frequencies and critical buckling loads of Simply – Supported FG sandwich beams. The faces of the sandwich beams are composed of a mixture of combination of metal and ceramic ($\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$) while the core is still homogeneous.

The material properties of Aluminum (Al) are $E = 70\text{GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 2707\text{kg} / \text{m}^3$ and those of Alumina (Al_2O_3) are $E = 380\text{GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 3960\text{kg} / \text{m}^3$

Unless mentioned otherwise, three types of FG beams (types A, B and C) are constituted by a mixture of isotropic ceramic (Al_2O_3) and metal (Al).

For convenience, the following non-dimensional parameters are used

$$\bar{w} = \frac{wh^3}{12} \frac{384E_m}{5q_0L^4}, \bar{\sigma}_{xx}(z) = \sigma_{xx}\left(\frac{L}{2}, z\right) \frac{h}{q_0L}, \bar{\sigma}_{xz}(z) = \sigma_{xz}(0, z) \frac{h}{q_0L} \quad (3.65)$$

$$\bar{N}_{cr} = N_{cr} \frac{12L^2}{E_m h^3}, \bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$

where E_m, ρ_m are Young's modulus and Poisson's ratio of metal, respectively.

Example 1: Vibration and buckling responses of RHSBT1, HSBT2 and quasi-3D2 FG beams (Type A, S-S)

To verify the theoretical basis of Section 3.2, we simulated the numerical results for FG beams. Tables 3.5 present the comparisons of the non-dimensional fundamental frequencies of FG beams ($\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$) with S-S boundary conditions (type A), various values of the power-law index p and two span-to-height ratio ($L/h = 5$ and 20) and compared to the solutions obtained from the HSBT [5] and third-order shear deformation beam theory (TSBT) [74]. It is seen that the solutions obtained derived from the proposed theory are in excellent agreement with those obtained from previous results for both deep and thin beams. Therefore, we will use this theoretical basis for this thesis and add or reduce the input conditions for FG beams.

Table 3.3 Non-dimensional fundamental frequency ($\bar{\omega}$) of FG beams with S-S boundary conditions (Type A).

L/h	Theory	p					
		0	0.5	1	2	5	10
5	HSBT1 [5]	5.1528	4.4102	3.9904	3.6264	3.4011	3.2816
	TSBT [74]	5.1527	4.4107	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816
	RHSBT1	5.3924	4.5900	4.1462	3.7777	3.5933	3.4907
	HSBT2	5.1527	4.4088	3.9904	3.6264	3.4012	3.2817
	Quasi-3D2	4.4870	3.7518	3.4345	3.2383	3.1657	3.0680
20	HSBT[5]	5.4603	4.6506	4.2051	3.8361	3.6485	3.5390
	TSBT [74]	5.4603	4.6511	4.2051	3.8361	3.6485	3.5390
	HSBT2	5.4603	4.6492	4.2050	3.8361	3.6485	3.5391
	RHSBT1	5.4659	4.6547	4.2087	3.8397	3.6533	3.5442
	Quasi-3D2	3.5424	2.9693	2.7368	2.5891	2.4650	2.3598

Example 2: Bending, buckling and vibration responses of RHSBT1 FG beams (Type B, S-S)

The effects of the power-law index and thickness ratio of layers on the fundamental frequency and critical buckling load are also displayed in Figs. 3.1 and 3.2. These figures show that the fundamental frequency and critical buckling load decrease with an increase of the power-law index for FG sandwich beams with homogeneous hardcore, and inversely they increase with p for homogeneous soft core.

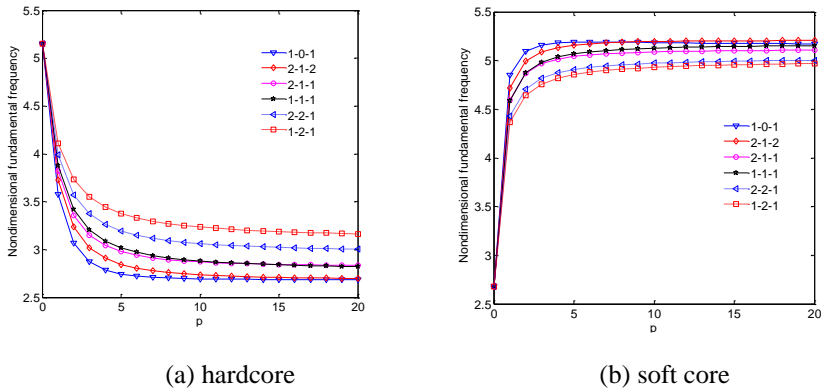
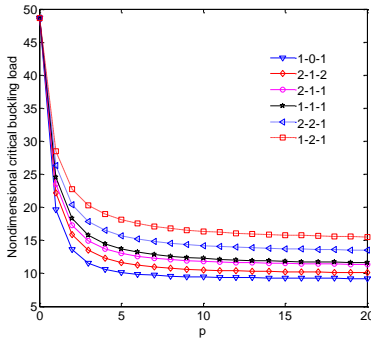
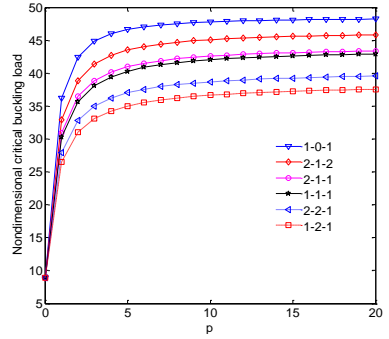


Figure 3.1 Effect of the power-law index p on the non-dimensional fundamental frequency ($\bar{\omega}$, type B, L/h=5).



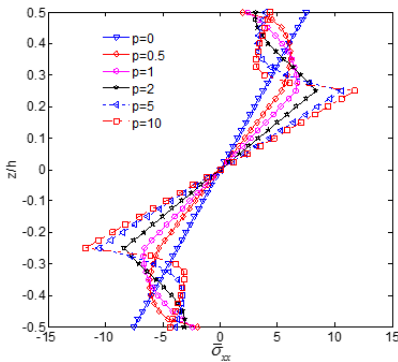
(a) hard core



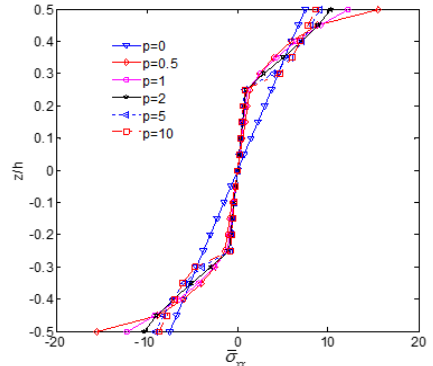
(b) soft core

Figure 3.2 Effect of the power-law index p on the non-dimensional critical buckling load (\bar{N}_{cr} , type B, $L/h=5$).

That can be explained by the fact that the higher value of p corresponds to higher portion of metal phase, and thus makes the beams become softer. It can be observed from these figures that the lowest and highest values of the fundamental frequency and critical buckling load correspond to the (1-0-1) and (1-2-1) sandwich beams with homogeneous hard core, and inversely for homogeneous soft core.



(a) Hard core



(b) Soft core

Figure 3.3 Distribution of non-dimensional axial stress $\bar{\sigma}_{xx}$ through the height of (1-2-1) FG sandwich beams (Type B, $L/h=10$).

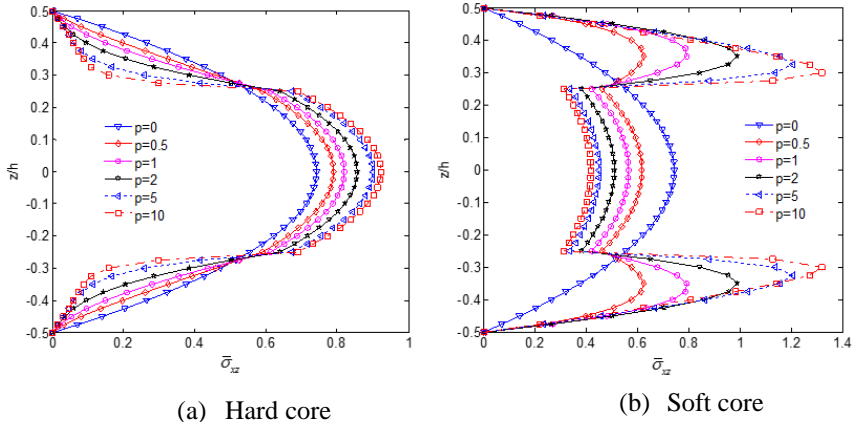


Figure 3.5 Distribution of non-dimensional transverse shear stress $\bar{\sigma}_{xz}$ through the height of (1-2-1) FG sandwich beams (Type B, $L/h=10$). The results are also plotted in Figures 3.3–3.5 with an increase of the power-law index, the deflection increases for homogeneous hard core and decreases for homogeneous soft core. Figure 3.4a shows that the variation of axial stresses of

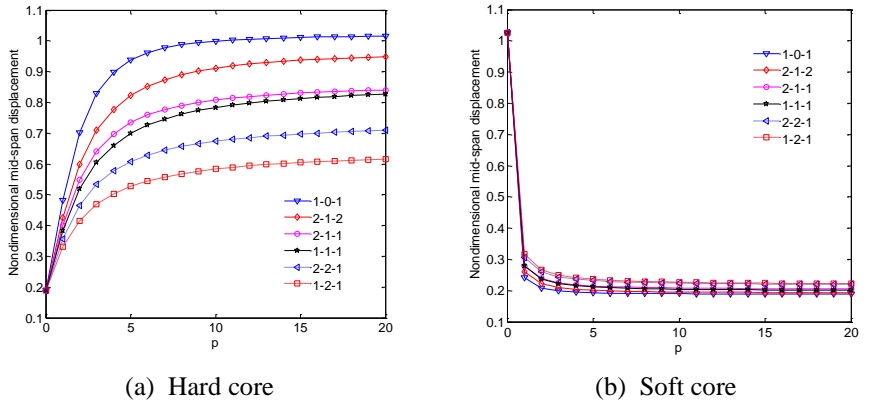


Figure 3.4 Effect of the power-law index p on the non-dimensional mid-span transverse displacement (\bar{w}) of FG sandwich beams (Type B, $L/h=10$). FG sandwich beams with homogeneous hard core is linear for $p=0$ and nonlinear in the face sheets for $p>0$. The maximum values of compressive and tensile stresses are located at the interfaces of faces and core for $p>0$. Figure 3.4b shows that the maximum axial stress tends to decrease with an increase of the power-law index. Figure 3.5 presents the variations of non-dimensional transverse shear

stress through the height of (1-2-1) FG sandwich beams for various values of the power law index. Obviously, for homogeneous hardcore, the maximum stresses are located at the mid-plane of the beam while for homogeneous soft core, they reside in the faces of FG sandwich beams.

Example 3: Buckling and vibration responses of Quasi-3D0 FG beams (type B, C)

Firstly, the convergence of the present polynomial series solution is studied. FG sandwich beams (Type B, 1-2-1) with span-to-depth ratio ($L/h=5$) and power-law index ($p=1$) are considered. This is carried out for the fundamental frequency and critical buckling loads with three boundary conditions. The present results are compared with those based on a polynomial quasi-3D theory [75] in Figure. 3.6. The solution of S-S boundary condition converges more quickly than C-C ones, and that the number of terms $N=14$ is sufficient to obtain an accurate solution. This number will be therefore used throughout the numerical examples.

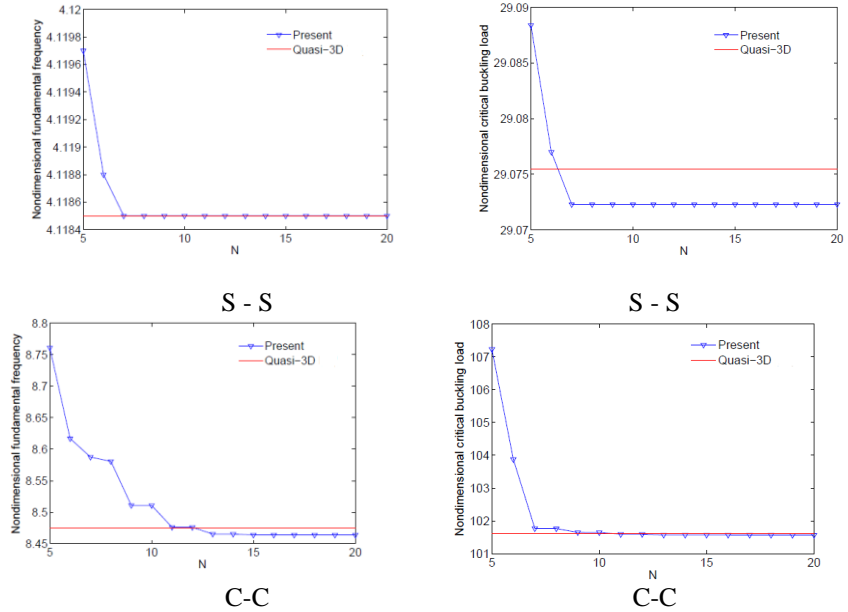


Figure 3.6 Convergence of the non-dimensional fundamental frequency ($\bar{\omega}$) and critical buckling load (\bar{N}_{cr}) of FG sandwich beams (type B, $p = 1, L/h = 5$).

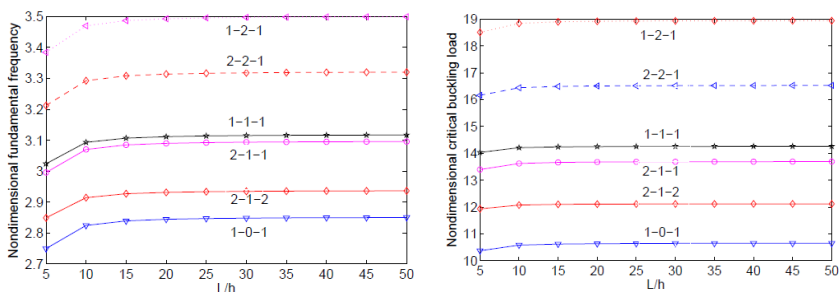


Figure 3.7 Effects of the span-to-depth ratio L/h on the non-dimensional fundamental frequency ($\bar{\omega}$) and critical buckling load (\bar{N}_{cr}) of FG sandwich beams (type B, $p = 5$).

Furthermore, it can be seen from the tables that the results decrease with the increase of the power-law index. The lowest and highest values of natural frequency and critical buckling load correspond to the (1-0-1) and (1-8-1) sandwich beams. This is because these beams correspond to the lowest and highest volume fractions of the ceramic phase. The effect of the span-to-depth ratio on the fundamental frequencies and critical buckling loads of S-S FG sandwich beams with $p = 5$ is plotted in Figure 3.7.

3.8 Conclusions

This chapter proposed a new higher-order shear deformation theory for static, buckling and free vibration analysis of FG beams and FG sandwich beams. The transverse shear stress accounts for a new hyperbolic distribution and satisfies the traction-free boundary conditions on the top and bottom surfaces of the beams. Governing equations of motion are derived from the Hamilton's principle and Lagrangian functional for FG beams and FG sandwich beams with homogeneous hardcore and soft core. Navier-type solution and Ritz solution are developed to solve the problem. Numerical results are obtained to investigate effects of the power-law index, span-to height ratio and thickness ratio of layers on the deflection, stresses, critical buckling load and natural frequencies. The present model is found to be appropriate and efficient in analyzing static, buckling and vibration of FG beams and FG sandwich beams.

Chapter 4 Hygro-thermo-mechanical effects on the static, buckling and vibration behaviors of FG beams

4.1 Introduction

The objective of this chapter is to present hygro-thermal responses of FG beams using a higher-order shear deformation theory in which a higher-order variation of both in-plane and out of plane displacement is considered. FG beams are

composed of ceramic and metal mixtures, and the material properties are varied according to power-law form. New Ritz solution is developed for different boundary conditions to verify the accuracy of the present theory and to investigate the effects of power-law index, span-to-depth ratio, temperature and moisture content on the vibration and buckling responses of FG beams under hydro-thermal loadings.

4.2 Novel Ritz-shape functions for analysis of FG beams with various BCs

4.2.1 Material properties

An FG beam made of a mixture of ceramic and metal isotropic materials, which is embedded in a moisture and temperature environment, with length L and uniform section $b \times h$ is considered as shown in Figure 3.1a. The material properties are varied according to power-law in section 2.21.

Moreover, the thermo-elastic material properties of FG beams are also expressed in terms of temperature $T(K)$ [76]:

$$H = H_0 (H_{-1} T^{-1} + 1 + H_1 T + H_2 T^2 + H_3 T^3) \quad (4.1)$$

where $H_0, H_1, H_2,$ and H_3 are temperature dependent coefficients for various types of materials in Table 4.1. It should be noted that both temperature dependency (TD) and temperature independency (TID) are considered in this studied.

4.2.2 Moisture and temperature distribution

Three different moisture and temperature distributions through the beam depth are considered: uniform moisture and temperature rise, linear moisture and temperature rise and nonlinear moisture and temperature rise in section 2.3.

Table 4.1 Temperature dependent coefficients for ceramic and metal materials.

Material	H_0	H_{-1}	H_1	H_2	H_3	H at 300 K
Al₂O₃						
E	349.55e+9	0	-3.853e-4	4.027e-7	-1.673e-10	320.24e+9
α	6.826e-6	0	1.838e-4	0	0	7.203e-6
ν	0.26	0	0	0	0	0.260
ρ	3800	0	0	0	0	3800
Si₃N₄						
E	348.43e+9	0	-3.070e-4	2.160e-7	-8.946e-11	322.27e+9
α	5.8723e-6	0	9.095e-4	0	0	7.475e-6
κ	13.723	0	-1.032e-3	5.466e-7	-7.876e-11	-
ν	0.24	0	0	0	0	0.240

ρ	2370	0	0	0	0	2370
β	0	0	0	0	0	0
SUS304						
E	201.04e+9	0	3.079e-4	-6.534e-7	0	207.79e+9
α	12.330e-6	0	8.086e-4	0	0	15.321e-6
κ	15.379	0	-1.264e-3	2.092e-6	-7.223e-10	-
ν	0.3262	0	-2.002e-4	3.797e-7	0	0.318
ρ	8166	0	0	0	0	8166
β	0.0005	0	0	0	0	0

4.2.3 Kinematics

The displacement field is chosen from previous study Quasi-3D1[77]:

$$u_1(x, z, t) = u(x, t) - zw_{,x} + \left[\sinh^{-1}\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{8z^3}{3\sqrt{5}h^3} \right] \theta(x, t) \quad (4.2)$$

$$u_3(x, z, t) = w(x, t) + \left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + z^2}} - \frac{8z^2}{\sqrt{5}h^3} \right) w_z(x, t)$$

where the comma indicates partial differentiation with respect to the coordinate subscript that follows; $f_2 = f_{1,z}$; u and θ are the axial displacement and rotation; and w and w_z are the transverse displacements, respectively.

The nonzero strains are given by:

$$\varepsilon_x(x, z, t) = u_{,x} - zw_{,xx} + f_1\theta_{,x}, \varepsilon_z(x, z, t) = f_{2,z}w_z, \gamma_{xz}(x, z, t) = f_2(\theta + w_{z,x}) \quad (4.3)$$

The elastic constitutive equations are given by:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{13} & 0 \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

4.2.4 Lagrange's equations

The strain energy U of system is expressed by:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [Au_{,x}^2 - 2Bu_{,x}w_{,xx} + Dw_{,xx}^2 + 2B^s u_{,x}\theta_{,x} - 2D^s w_{,xx}\theta_{,x} + H^s \theta^2 + 2(Xu_{,x}w_z - Yw_{,xx}w_z + Y^s \theta_{,x}w_z) + A^s (\theta^2 + 2\theta w_{z,x} + w_{z,x}^2)] dx \quad (4.5)$$

The work done V by axial hygro-thermal stress resultants is expressed by:

$$V = -\frac{1}{2} \int_0^L (N^t + N^m) (w_{,x})^2 dx \quad (4.6)$$

where

$$N^t = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{11}(z) \alpha(z) [T(z) - T^0] b dz, \quad N^m = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{11}(z) \beta(z) [C(z) - C^0] b dz \quad (4.7)$$

The kinetic energy K is expressed by:

$$K = \frac{1}{2} \int_V [I_0 \dot{u}^2 - 2I_1 \dot{u} \dot{w}_{,x} + I_2 \dot{w}_{,x}^2 + 2J_1 \dot{\theta} \dot{u} - 2J_2 \dot{\theta} \dot{w}_{,x} + K_2 \dot{\theta}^2 + I_0 \dot{w}^2 + 2L_1 \dot{w} \dot{w}_{,z} + L_2 \dot{w}_{,z}^2] dx \quad (4.8)$$

Lagrangian functional is used to derive the governing equations of motion:

$$\Pi = U + V - K \quad (4.9)$$

4.3 Ritz method

The solution field u, w, θ_x and w_z is approximated as in the Eq. 3.59:

4.3.1 A shape functions for Ritz method

To derive analytical solutions, the shape functions $\psi_j(x)$ and $\varphi_j(x)$ are chosen for various boundary conditions Hinged – Hinged (H–H), Clamped – Hinged (C–H), and Clamped – Clamped (C–C) beams as in Eq 3.60:

$$\psi(x) = x^{j-1}, \quad \varphi(x) = x^{j-1}$$

By substituting Eq 3.59 into Eq 4.9, and using Lagrange's equations:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (4.10)$$

with q_j representing the values of $(u_j, w_j, \theta_j, w_{zj})$ and β_j that leads to:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (4.11)$$

Table 4.2 Kinematic BCs of the beams.

BCs	$x=0$	$x=L$
H – H	$u = 0, w = 0, w_z = 0$	$u = 0, w = 0, w_z = 0$
C – H	$u = 0, w = 0, w_{,x} = 0, \theta = 0, w_z = 0$	$u = 0, w = 0, w_z = 0$
C – C	$u = 0, w = 0, w_{,x} = 0, \theta = 0, w_z = 0$	$u = 0, w = 0, w_{,x} = 0, \theta = 0, w_z = 0$

4.3.2 A new hybrid functions

In this chapter, the new hybrid functions $\psi_j(x)$ and $\varphi_j(x)$ for Ritz solution reported in **Table 4.2** are proposed for six typical BCs. It is clear that they satisfy various BCs:

Table 4.3 A new hybrid functions for Ritz solution.

BCs	$\psi_j(x)/e^{-jx/L}$	$\varphi_j(x)/e^{-jx/L}$
S – S	$\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$
H – H	$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$
C – S	$\sin\left(\frac{\pi}{2L}x\right)$	$\sin^2\left(\frac{\pi}{2L}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right)$
C – H	$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$	$\sin^2\left(\frac{\pi}{2L}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right)$
C – F	$\sin\left(\frac{\pi}{2L}x\right)$	$\sin^2\left(\frac{\pi}{2L}x\right)$
C – C	$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$	$\sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)$

4.4 Numerical results and discussions

In this studied, several numerical examples are analyzed to verify the accuracy of present theory and investigate the effects of power-law index, span-to-depth ratio, transverse normal strain, temperature and moisture content on buckling and vibration responses of FG beams for various BCs in Table 4.2 and Table 4.3. FG beams are made of ceramic ($\text{Si}_3\text{N}_4, \text{Al}_2\text{O}_3$) and metal (SUS304) with material properties in Table 4.1. Three types of temperature and moisture distribution through the beam depth are considered:

- Uniform moisture and temperature rise (UMR, UTR),
- Linear moisture and temperature rise (LMR, LTR),
- Nonlinear moisture and temperature rise (NLMR, NLTR).

The following non-dimensional parameters are used:

$$\bar{\omega} = \omega \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{I_0}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz}}, \hat{\omega} = \omega \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho_c}{E_c}}, \lambda = \Delta T_{cr} \left(\frac{L}{h}\right)^2 \alpha_m, \quad (4.12)$$

where α_m is thermal expansion coefficient of metal at $T_0(K)$. Noticing that the following relations are used in this study: $T_0 = 300(K)$, $C_0 = 0\%$, $T_b - T_0 = 5(K)$. As in the first study, FG beams under uniform temperature rise (UTR) are considered. Table 4.3 presents the normalized critical temperatures of $\text{Si}_3\text{N}_4 / \text{SUS304}$ beams for both temperature dependency (TD) and temperature independency (TID) solutions with different values of power-law index p . It is noted that the results reported in this research assume that the temperature resultant in Eq 4.12 is calculated with $\bar{Q}_{11} = E(z)/(1-\nu)$. The results are compared with those of Wattanasakulpong et al. [78] and Trinh et al. [79] using HSBT. The present results without normal strain ($\varepsilon_{zz} = 0$) are in good agreement with earlier works.

Table 4.4 Normalized critical temperatures (λ) of $\text{Si}_3\text{N}_4 / \text{SUS304}$ beams under UTR ($L/h = 20$).

Temperature dependency	BCs	Theory	p			
			0	0.5	1	5
TD	H-H	HSBT	1.309	0.970	0.878	0.752
		Quasi-3D	1.210	0.897	0.811	0.695
		HSBT[79]	1.307	–	0.866	0.744
		HSBT [78]	1.348	–	0.876	0.750
	C-C	HSBT	5.133	3.780	3.399	2.918
		Quasi-3D	4.781	3.522	3.169	2.720
		HSBT[79]	5.130	–	3.398	2.917
		HSBT [78]	5.130	–	3.398	2.917
TID	H-H	HSBT	1.151	0.882	0.806	0.698
		Quasi-3D	1.071	0.820	0.748	0.648
		HSBT[79]	1.151	–	0.796	0.693
		HSBT [78]	1.185	–	0.805	0.697
	C-C	HSBT	3.553	2.831	2.606	2.332
		Quasi-3D	3.336	2.663	2.456	2.190
		HSBT[79]	3.559	–	2.609	2.333
		HSBT [78]	3.559	–	2.609	2.333

Table 4.5 Critical temperature (λ) of FG beams under LTR and Fourier-law NLTR (Type A, $\text{Si}_3\text{N}_4 / \text{SUS304}$, $L/h = 40$, TD).

Temperature distribution	BCs	Theory	p				
			0	0.5	2	5	10
LTR	H-H	HSBT ^a ($\varepsilon_{zz} = 0$)	116.4406	91.8046	75.8794	69.0474	64.8133
		HSBT ^b ($\varepsilon_{zz} = 0$)	116.4489	91.8593	75.8855	69.0538	64.8135
		FSBT[80]	127.3340	95.5739	76.4715	69.4307	–
Fourier law NLTR	C-C	HSBT ^a ($\varepsilon_{zz} = 0$)	411.7059	377.7547	337.0286	310.0925	291.3543
		HSBT ^b ($\varepsilon_{zz} = 0$)	411.5244	377.7382	336.8448	309.9130	291.1854
		FSBT[81]	412.2400	377.9600	337.0300	310.1200	291.3500

^a $\bar{Q}_{11} = E(z)$, ^b: A new hybrid functions.

The next example aims to investigate the effects of linear and nonlinear temperature rise (LTR, NLTR) on the thermal buckling and vibration of FG beams. For verification purpose, the critical temperatures of $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$ beams with $L/h = 40$ are reported in Table 4.4. These results are compared with those of Esfahani et al. [81], Ebrahimi and Salari [80] based on FSDT. It is observed that the present solutions are in good agreement with those of [81] for C–C beams under the Fourier-law NLTR while there are slight deviations for several values of p between the present solutions and those of [80] for H-H beams under LTR. It is noted that the superscript “a” is used to indicate that Poisson’s ratio effect is not included in the constitutive equation and thermal stress resultant ($\bar{Q}_{11} = E(z)$), “b” is used to indicate that the new hybrid functions in Table 4.2 and this index will be used in the next examples for verification studies.

Table 4.6 Critical temperature (λ) of $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$ FG beams under Fourier and sinusoidal-law NLTR ($L/h = 30$, TD).

Temperature distribution	BCs	Theory	p			
			0	0.5	2	5
Fourier	H-H	HSBT	202.2578	173.5389	148.3615	134.2035
		HSBT ^b	202.2828	173.6457	148.3834	134.2251
		Quasi-3D	187.7199	160.0195	136.2821	123.1300
	C-C	HSBT	647.7525	630.7537	589.7918	550.4308
		HSBT ^b	647.7525	630.9784	589.7918	550.4308
		Quasi-3D	611.2257	590.8552	548.9211	510.9149
	C-H	HSBT	379.9401	345.7176	306.6677	281.4281
		HSBT ^b	380.0093	345.9351	306.7295	281.4875
		Quasi-3D	355.7747	321.7415	283.7695	259.9836
Sinusoidal	H-H	HSBT	266.8324	224.9764	193.4138	178.0297
		HSBT ^b	266.8651	225.1077	193.4415	178.0572
		Quasi-3D	248.2054	208.2022	178.2136	163.6644
	C-C	HSBT	823.1910	755.8429	706.6631	687.8553
		HSBT ^b	823.1910	756.0849	706.6631	687.8553
		Quasi-3D	778.0221	710.9078	661.3097	641.8079
	C-H	HSBT	491.8173	430.8636	385.4767	364.4358
		HSBT ^b	491.8957	431.0940	385.5505	364.5125
		Quasi-3D	461.5226	402.6337	358.7276	337.7749

b: A new hybrid functions.

Figure 4.1a displays the variation of fundamental frequency for UTR, LTR and Fourier-law NLTR. The results decrease with the increase of ΔT and vanish at the critical temperatures. Table 4.5 and Figure 4.1b consider the effects of temperature distribution under Fourier- and sinusoidal-law through the beam depth for different boundary conditions. For comparison, the critical temperature with Fourier law is smaller than that with sinusoidal one.

Moreover, Tables 4.6 presents the normalized fundamental frequency of $\text{Si}_3\text{N}_4 / \text{SUS304}$ beams with $L/h=20$, $p=0.1, 0.5$ and 1 , $\Delta T = 20$, subjected to the LTR and Fourier-law NLTR. The results are compared to those of [79, 80] for different boundary conditions and good agreements between the HSBT models are again found. The final research is to analyse the effects of moisture content on the thermal vibration behavior of FG beams.

Table 4.7 Fundamental frequency ($\hat{\omega}$) of FG beams under LTR, NLTR (Type A, $\text{Si}_3\text{N}_4 / \text{SUS304}$, $L/h = 20$, TD).

Temperature distribution	BCs	Theory	$\Delta T(\text{K}) = 20$			
			$p=0.1$	0.5	1	
LTR	H-H	HSBT	8.7846	6.8133	5.9658	
		HSBT ^b	8.8832	6.9056	6.0551	
		Quasi-3D	8.4170	6.5248	5.7113	
		HSBT ^a	8.4391	6.5450	5.7307	
		HSBT[80]	8.4716	6.5742	5.7588	
		HSBT [79]	8.4634	6.5415	5.7114	
	C-C	HSBT	20.1188	15.6333	13.6920	
		HSBT ^b	20.1797	15.6863	13.7415	
		Quasi-3D	19.4059	15.0816	13.2106	
		HSBT ^a	19.3522	15.0342	13.1654	
		HSBT[80]	19.6398	15.2580	13.3671	
		HSBT [79]	19.3371	15.0222	13.1554	
	Fourier-law NLTR	H-H	HSBT	8.7865	6.8184	5.9719
			HSBT ^b	8.8843	6.9104	6.0611
Quasi-3D			8.4190	6.5302	5.7178	
HSBT ^a			8.4409	6.5499	5.7366	
HSBT[80]			8.4675	6.5437	5.7124	
HSBT [79]			8.4730	6.5779	5.7632	
C-C		HSBT	20.1198	15.6360	13.6953	
		HSBT ^b	20.1798	15.6885	13.7454	
		Quasi-3D	19.4070	15.0844	13.2140	
		HSBT ^a	19.3532	15.0369	13.1685	
		HSBT[80]	19.6390	15.2501	13.3558	
		HSBT [79]	19.3379	15.0244	13.1579	

^a $\bar{Q}_{11} = E(z)$, *b*: A new hybrid functions.

Tables 4.7 presents the normalized fundamental frequencies of $\text{Si}_3\text{N}_4 / \text{SUS304}$ FG beams under the nonlinear moisture (NLMR) and temperature rises. It is noted that the sinusoidal-law NLMR is used in this example. The results are calculated for the power-law indices $p = 0.2, 1$ and 5 , $\Delta T = 0$ and 40 , $\Delta C = 0\%$, 1% and 2% . The present solutions are compared with those obtained from Ebrahimi and Barati [82] based on HSBT with H-H beam. The present solutions based on HSBT without Poisson's ratio are in good agreement with those of [82] for all moisture and temperature changes. The effect of normal strain is clearly observed in which the quasi-3D solutions are smaller the HSBT ones.

4.5 Conclusions

Hygro-thermal vibration and stability analysis of FG beams is presented. It is based on a higher-order shear deformation theory, which considers a higher-order distribution of transverse shear stress and both in-plane and out-of-plane displacements. These beams are subjected to hygro-thermal loadings under uniform, linear and nonlinear distributions through the beam depth. Lagrange's equations are applied to derive the characteristic dynamic equations and the New Ritz solution method is developed to solve the problems for different boundary conditions. The proposed Ritz solution converges quickly and agrees well with that from other studies. The obtained numerical results showed that:

- ✚ The critical buckling temperatures and natural frequencies derived from the quasi-3D theory, which includes normal strain, is smaller than those from the HSBT, which neglects it. This implies that the effect of normal strain is important and needs to be considered for the analysis of hygro-thermal behaviors of FG beams.

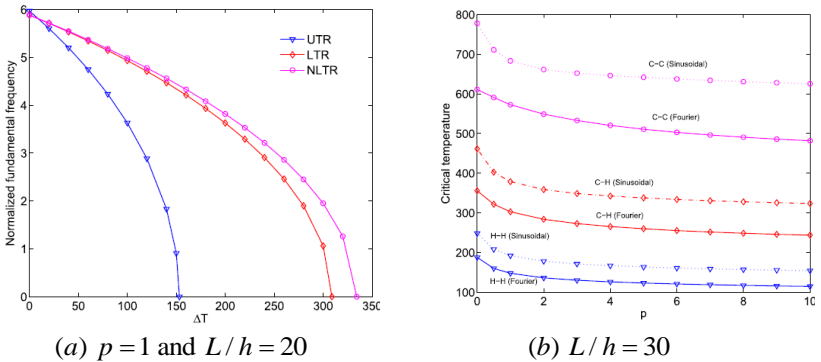


Figure 4.1 Variation of normalized fundamental frequency of $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$ beams with respect to the power-law index p and temperature rise (TD).

- ✚ The increase of the power-law index leads to the increase of metal volume fraction, which makes the beams softer and decreases the critical temperature and natural frequency.
- ✚ The temperature dependent solutions give lower values than the temperature independent ones, so the importance of temperature dependency in the FG beams is confirmed.
- ✚ For a temperature rise, the critical temperature and fundamental frequency derived from nonlinear temperature rise are larger than those from uniform one.

- ✚ The critical temperature and fundamental frequency calculated from Fourier-law nonlinear temperature distribution are smaller than those from sinusoidal-law one.
- ✚ The thermal buckling and vibration responses of FG beams decrease with the increase of moisture content.

In conclusion, the proposed beam model and approach is found to be simple and efficient for hygro-thermal buckling and vibration of FG beams.

Table 4.8 Fundamental frequency ($\hat{\omega}$) of FG beams under sinusoidal moisture and temperature rise (L/h = 20,TD).

BCs	ΔC	Theory	$\Delta T(K) = 0$			$\Delta T(K) = 40$		
			$p=0.2$	1	5	$p=0.2$	1	5
H-H	$\Delta C = 0\%$	HSBT	8.2127	6.1295	4.9846	7.9533	5.8962	4.7572
		Quasi-3D	7.8828	5.8824	4.7825	7.6122	5.6383	4.5440
		HSBT ^a	7.8889	5.8879	4.7882	7.6399	5.6639	4.5699
		HSBT[82]	7.8817	5.8491	4.7664	–	–	–
	$\Delta C = 1\%$	HSBT	8.1874	6.0529	4.8399	7.9272	5.8163	4.6044
		Quasi-3D	7.8565	5.8026	4.6316	7.5848	5.5547	4.3841
		HSBT ^a	7.8646	5.8143	4.6493	7.6148	5.5872	4.4232
		HSBT[82]	–	–	–	–	–	–
	$\Delta C = 2\%$	HSBT	8.1619	5.9753	4.6907	7.9009	5.7353	4.4464
		Quasi-3D	7.8300	5.7217	4.4757	7.5574	5.4699	4.2180
		HSBT ^a	7.8402	5.7398	4.5061	7.5896	5.5094	4.2716
		HSBT[82]	–	–	–	7.5826	5.4650	4.2429
C-H	$\Delta C = 0\%$	Quasi-3D	12.3395	9.1845	7.4860	12.1444	9.0147	7.3230
	$\Delta C = 1\%$	Quasi-3D	12.3199	9.1253	7.3749	12.1245	8.9540	7.2085
	$\Delta C = 2\%$	Quasi-3D ^a	12.3003	9.0656	7.2619	12.1045	8.8930	7.0919
C-C	$\Delta C = 0\%$	Quasi-3D	17.8621	13.2929	10.8379	17.7252	13.1818	10.7347
	$\Delta C = 1\%$	Quasi-3D	17.8478	13.2495	10.7567	17.7107	13.1379	10.6521
	$\Delta C = 2\%$	Quasi-3D ^a	17.8334	13.2059	10.6748	17.6962	13.0938	10.5687

Chapter 5 Size dependent effects on the thermal buckling and vibration behavior of FG beams in thermal environments

5.1 Introduction

The modified couple stress theory is used to perform a buckling analysis on FG micro beams based on third order shear deformation (Reddy) beam theories in thermal environment. The beam is assumed to be functionally graded in the thickness direction; while Poisson ratio is assumed to be constant, but it is not neglected. The principal of minimum potential energy is applied to obtain the governing equations and boundary conditions of the FG beam. To analyse different boundary conditions, Ritz method is used to solve the governing equations numerically.

The nonlocal elasticity theory is based on Timoshenko's and Eringer's nonlocal elasticity ones. Ritz solution method is used to solve characteristic equations of motion with various boundary conditions.

The objectives of this chapter is to propose analysis of FG micro and nano beams with various boundary conditions in thermal environments. Numerical results are compared to the earlier works and to investigate the effects of material distribution through the beam thickness, span-to-thickness ratio, scale length parameter and boundary conditions on the natural frequencies and the thermal buckling of FG micro and nano beams.

5.2 Geometry of FG beams

Geometry of beams as in Figure. 2.6a with rectangular section $b \times h$ and length L . In this study, it is made of a mixture of isotropic ceramic and metal whose properties continuously in the beam, as follows in section 2.1:

5.3 Theory of functionally graded nano beams

5.3.1. Kinetic and strain

The displacement field of Timoshenko beams is given by:

$$u_1(x, z, t) = u(x, t) + (z - z_0)\theta(x, t), \quad u_3(x, z, t) = w(x, t) \quad (5.1)$$

where the comma indicates the partial differentiation with respect to the coordinate subscript that follows; $u(x, t)$, $\theta(x, t)$, $w(x, t)$ are axial displacement, rotation and transverse displacement at the mid-plan of the nano beams, respectively.

$$\varepsilon_x = u_{,x} + z\theta_{,x} = \varepsilon_x^{(0)} + z\varepsilon_x^{(1)}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^{(0)} = \theta + w_{,x} \quad (5.2)$$

5.3.2. Equations of motion

Hamilton's principle is used to derive equations of motion of. It can be stated in analytical form as follows:

$$0 = \int_0^T (\delta U - \delta K) dt \quad (5.3)$$

where $\delta U, \delta K$ are the variation of strain energy and kinetic energy of the nano beams. The variation of strain energy δU of system is given by:

$$\delta U = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV = \int_0^L (N_x \delta \varepsilon_x^{(0)} + M_x \delta \varepsilon_x^{(1)} + Q \delta \gamma_{xz}^{(0)}) dx \quad (5.4)$$

where the stress resultants are defined as:

$$(N_x, M_x) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z) \sigma_x b dz, Q = \int_{-h/2}^{h/2} k^s \sigma_{xz} b dz \quad (5.5)$$

where k^s is shear correction factor which is supposed to be 5/6.

The variation of kinetic energy K of system is written by:

$$\delta K = \int_0^L [I_0 \dot{u} \delta \dot{u} + I_2 \dot{\theta} \delta \dot{\theta} + I_1 (\dot{u} \delta \dot{\theta} + \dot{\theta} \delta \dot{u}) + I_0 \dot{w} \delta \dot{w}] dx \quad (5.6)$$

Substituting Eqs. 5.4 and 5.6 into Eq. 5.3 leads to the following equations of motion:

$$N_{x,x} = I_0 \ddot{u} + I_1 \ddot{\theta}, M_{x,x} - Q = I_1 \ddot{u} + I_2 \ddot{\theta}, Q_x = I_0 \ddot{w} \quad (5.7)$$

5.3.3. Nonlocal elasticity theory for FG nano beams

Based on the Eringen's nonlocal elasticity theory [70], nonlocal constitutive equations are expressed by:

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij} = t_{ij} \quad (5.8)$$

where ∇ denotes Laplacian operator; $\mu = (e_0 a)^2$ is parameter of scale length that

considers the influences of small size on the response of nanostructures; t_{ij} are global stresses. The constitutive equations of FG nano beams are hence written under the following expressions:

$$\sigma_x - \mu \sigma_{x,xx} = Q_{11}(z) \varepsilon_x, \sigma_{xz} - \mu \sigma_{xz,xx} = Q_{55}(z) \gamma_{xz} \quad (5.9)$$

Substituting Eqs. 5.2 into Eqs. 5.9 and then subsequent results into the stress resultants in Eqs. 5.7, the following nonlocal constitutive equations of stress resultants are defined as:

$$N_x - \mu N_{x,xx} = A u_{,x} + B \theta_{,x}, M_x - \mu M_{x,xx} = B u_{,x} + D \theta_{,x}, Q - \mu Q_{,xx} = A^s (\theta + w_{,x}) \quad (5.10)$$

Substituting Eqs 5.7 into Eqs 5.10 leads to the expressions of stress resultants as follows:

$$N_x = \mu (I_0 \ddot{u}_{,x} + I_1 \ddot{\theta}_{,x}) + A u_{,x} + B \theta_{,x}, M_x = \mu (I_0 \ddot{w} + I_1 \ddot{u}_{,x} + I_2 \ddot{\theta}_{,x}) + B u_{,x} + D \theta_{,x} \quad (5.11)$$

$$Q = \mu I_0 \ddot{w}_{,x} + A^s (\theta + w_{,x})$$

Substituting Eqs. (5.11) into Eq. (5.3) yields:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^L \left\{ \left[\mu \left(I_0 \ddot{u}_{,x} + I_1 \ddot{\theta}_{,x} \right) + Au_{,x} + B\theta_{,x} \right] \delta u_{,x} + \left[\mu \left(I_0 \ddot{w} + I_1 \ddot{u}_{,x} + I_2 \ddot{\theta}_{,x} \right) + Bu_{,x} + D\theta_{,x} \right] \delta \theta_{,x} \right. \\
& + \left. \left[\mu I_0 \ddot{w}_{,x} + A^s (\theta + w_{,x}) \right] (\delta \theta + \delta w_{,x}) \right. \\
& \left. - \left[I_0 \dot{u} \delta \dot{u} + I_2 \dot{\theta} \delta \dot{\theta} + I_1 (\dot{u} \delta \dot{\theta} + \dot{\theta} \delta \dot{u}) + I_0 \dot{w} \delta \dot{w} \right] \right\} dx dt = 0
\end{aligned} \tag{5.12}$$

5.4 Micro FG beams for HSBT

5.4.1. Modified couple stress theory (MCST)

The displacement field is chosen from previous study **HSBT1**:

$$u_i(x, z, t) = u(x, t) - zw_{,x} + f(z)\theta(x, t), \quad u_3(x, z, t) = w(x, t)$$

where u , θ are the mid-plane axial displacement and rotation, w and w_z denotes the mid-plane transverse displacement of the beam, the comma indicates partial differentiation with respect to the coordinate subscript that follows.

Based on the MCST [12], the rotation about the x -, y -, z - axes are determined by:

$$\begin{aligned}
\theta_x(x, z, t) &= \frac{1}{2}(u_{3,y} + u_{2,z}) = 0, \quad \theta_z(x, z, t) = \frac{1}{2}(u_{2,x} - u_{1,y}) = 0 \\
\theta_y(x, z, t) &= \frac{1}{2}(u_{1,z} + u_{3,x}) = \frac{1}{2}[f_{,z}(z)\theta - 2w_{,x}]
\end{aligned} \tag{5.13}$$

The strain and curvature fields of beams is obtained as:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}(x, z, t) &= u_{,x} - zw_{,xx} + f\theta_{,x}, \quad \gamma_{xz}(x, z, t) = f_{,x}\theta \\
\chi_{xy}(x, z, t) &= \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \frac{1}{2}[f_{,z}(z)\theta_{,x} - 2w_{,xx}] \\
\chi_{zy}(x, z, t) &= \frac{\partial \theta_y}{\partial z} = \frac{1}{2}f_{,zz}(z)\theta
\end{aligned} \tag{5.14}$$

The elastic constitutive equations are given by:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{13} & 0 \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{5.15}$$

The couple stress-curvature relation can be introduced as [12]:

$$\begin{Bmatrix} m_{xy} \\ m_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xy} \\ \chi_{zy} \end{Bmatrix} \tag{5.16}$$

where

$$Q_{44}(x, z) = Q_{66}(x, z) = Q_{55}(x, z)\zeta^2 = \frac{E(x, z)}{2(1-\nu)}\zeta^2 \tag{5.17}$$

with ζ are respectively the MLSPs in x -directions.

5.4.2. Variation formulation for MCST

Lagrangian functional is used to derive the equations of motion:

$$\Pi = U + V - K \quad (5.18)$$

The strain energy of the FG beams can be stated as:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[Au_{,x}^2 - 2Bu_{,x}w_{,xx} + (A^m + D)w_{,xx}^2 + 2B^s u_{,x}\theta_{,x} - 2\left(\frac{B^m}{2} + D^s\right)w_{,xx}\theta_{,x} + \left(H^s + \frac{D^m}{4}\right)\theta_{,x}^2 + \left(A^s + \frac{H^m}{4}\right)\theta^2 \right] dx \quad (5.19)$$

The work done V by axial thermal stress can be written as Eq. (4.11):

$$V = -\frac{1}{2} \int_0^L N^t (w_{,x})^2 dx$$

The kinetic energy is obtained as:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) \left[I_0 \dot{u}^2 - 2I_1 \dot{u}\dot{w}_{,x} + I_2 \dot{w}_{,x}^2 + 2J_1 \dot{\theta}\dot{u} - 2J_2 \dot{\theta}\dot{w}_{,x} + K_2 \dot{\theta}^2 + I_0 \dot{w}^2 \right] dx \quad (5.20)$$

By substituting Eqs 5.19, 4.11 and 5.20 into Eq 5.18, Lagrangian functional is explicitly expressed as:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[Au_{,x}^2 - 2Bu_{,x}w_{,xx} + (A^m + D)w_{,xx}^2 + 2B^s u_{,x}\theta_{,x} - 2\left(\frac{B^m}{2} + D^s\right)w_{,xx}\theta_{,x} + \left(H^s + \frac{D^m}{4}\right)\theta_{,x}^2 + \left(A^s + \frac{H^m}{4}\right)\theta^2 \right] dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L N^t (w_{,x})^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) \left[I_0 \dot{u}^2 - 2I_1 \dot{u}\dot{w}_{,x} + I_2 \dot{w}_{,x}^2 + 2J_1 \dot{\theta}\dot{u} - 2J_2 \dot{\theta}\dot{w}_{,x} + K_2 \dot{\theta}^2 + I_0 \dot{w}^2 \right] dx \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.5 Ritz method (RM)

5.5.1. Ritz method for nonlocal theory

Based on the RM, the displacements (u, w, θ) are approximated in the following forms:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^m \psi_j(x) u_j e^{i\omega t}, \quad w(x, t) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) w_j e^{i\omega t}, \quad \theta(x, t) = \sum_{j=1}^m \psi_j(x) \theta_j e^{i\omega t} \quad (5.22)$$

where u_j, w_j, θ_j are unknown values to be determined; $i^2 = -1$; ω is natural frequency; $\psi_j(x)$ and $\varphi_j(x)$ are the shape functions which are proposed in Table 5.1 for Simply-Supported (S – S), Clamped – Clamped (C – C) and Clamped – Free (C-F) boundary conditions (BCs). Substituting Eqs. 5.21 into Eq. 5.12, the following characteristic equation is obtained:

$$(\mathbf{K} - \omega^2(\mathbf{M} + \mu\mathbf{M}_n))\mathbf{U} = 0 \quad (5.23)$$

Table 5.1 Kinematic BCs of nano beams.

BCs	Position	Value
S-S	$x=0$	$w = 0$
	$x=L$	$w = 0$
C-F	$x=0$	$u = 0, w = 0, w_{,x} = 0, \theta = 0$
	$x=L$	-
C-C	$x=0, x=L$	$u = 0, w = 0, w_{,x} = 0, \theta = 0$

5.5.2. Ritz method for MCST

By using Ritz method, the displacement field in Eq 5.21 is approximated by:

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^m \psi_j(x) u_j e^{i\omega t}, w(x,t) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) w_j e^{i\omega t}, \theta(x,t) = \sum_{j=1}^m \psi_j(x) \theta_j e^{i\omega t} \quad (5.24)$$

where u_j, w_j, θ_j are unknown values to be determined; $i^2 = -1$; ω is natural frequency; $\psi_j(x)$ and $\varphi_j(x)$ are the hybrid functions for Ritz solution reported in Table 4.3. A characteristic problem for vibration and thermal buckling response is obtained through the stiffness matrix \mathbf{K} and mass matrix \mathbf{M} :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (5.25)$$

5.6 Numerical results and discussions

Example 1: Vibration responses of FSBT and the Eringen's nonlocal elasticity theory for FG nano beam (type A, various BCs)

A number of FG nano beams are considered in this section to verify the accuracy and efficiency of the present theory, and to investigate effects of the material parameter p , side-to-thickness ratio L/h , scale parameter μ and BCs on the natural frequencies of FG nano beams.

The FG nano beams are supposed to be made of steel and Alumina (Al_2O_3) whose properties are followed: $E_m = 210\text{GPa}$, $\rho_m = 7800\text{kg}/\text{m}^3$, $E_c = 390\text{GPa}$, $\rho_c = 3960\text{kg}/\text{m}^3$, $\nu_m = \nu_c = 0.3$. The FG nano beam geometry is given as follows: $L = 10000\text{ nm}$, $b = 1000\text{ nm}$, $h = 100\text{ nm}$. For simplicity, the following nondimensional frequency is introduced:

$$\hat{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho_c}{E_c}} \quad (5.26)$$

Tables 5.2 figure out the effects of nonlocal parameter and material gradation on the frequencies of the clamped – clamped beams, respectively. It is concluded that, as the material gradation increases the frequencies decreased. Also, as the nonlocal parameter increases the frequencies decreased, for the both cases.

Fig. 5.1 illustrates the non-dimensional frequency within the different boundary conditions at material at gradation $p=1$, the non-locality parameter $\mu=1$ and the constant slenderness ratio ($L/h=100$). In this figure, it indicates that the dimensionless

frequency will be gradually decreasing from C-C, S-S and C-F. The largest non-dimensional frequency decreases when the material constant is between 0 and 2. Then, the non-dimensional frequency tends to move vertically as the material constant increases.

Table 5.2 The non-dimensional first natural frequencies with the nonlocal parameter of FG nano beams (type A, C-C, $L/h = 100$, $N=10$).

μ (nm) ²	Theory	Material parameter p					
		0	0.5	1	2	5	10
0	FSDT	22.3597	17.5498	15.8506	14.5525	13.4636	12.8607
	Eltaher [83]	22.3744	17.5613	15.8612	14.5626	13.4733	12.8698
1	FSDT	21.0991	16.5604	14.9570	13.7321	12.7047	12.1358
	Eltaher [83]	21.1096	16.5686	14.9645	13.7394	12.7116	12.1423
3	FSDT	19.0974	14.9892	13.5379	12.4294	11.4995	10.9845
	Eltaher [83]	19.1028	14.9934	13.5419	12.4332	11.5032	10.9880

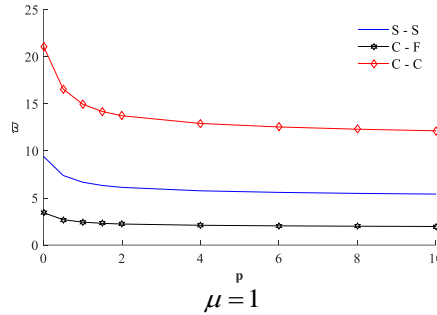


Figure 5.1 The frequency with material graduation for the different BCs

Example 2: Vibration and the thermal buckling responses of HSBT1 and the MCST for FG micro beam (type A, various BCs)

With FG micro beam, several numerical examples are analysed to verify the accuracy of present theory and investigate the effects of power-law index, span-to-depth ratio, transverse normal strain, temperature content on buckling and vibration responses of FG micro beams for various boundary conditions. FG micro beams are made of ceramic (Si_3N_4) and metal (SUS304) with material properties in Table 4.1.

$$\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho_c}{E_c}}, \quad \lambda = \Delta T_{cr} \frac{L^2}{h^2} \alpha_m \quad (5.27)$$

where α_m is thermal expansion coefficient of metal at T_0 (K). Noticing that the following relations are used in this paper: $T_0 = 300$ (K), $T_b - T_0 = 5$ (K).

The non-dimensional fundamental frequencies of the FG micro beams with various BCs and span-to-thickness are given in Tables 5.3. For macro FG beams ($\zeta = 0$), the present results again agree well with those of HSBT[84]. Some new results for FG beams are shown to serve as benchmarks for future studies. The results are increased

as ζ increases but the results are decreased as ΔT increases. This response can be expected because an increase in the material length scale parameters (MLSPs) leads to an increase in the beams' stiffness.

Table 5.3 Fundamental frequency ($\hat{\omega}$) of FG micro beams under LTR (Type A, $\text{Si}_3\text{N}_4 / \text{SUS304}$, $L/h = 20$, TD).

BCs	L/h	ζ	Theory	$\Delta T(\text{K}) = 80$		
				$p=0.1$	0.5	1
H-H	20	$\zeta = 0$	HSBT[84]	8.1742	6.2547	5.4252
		$\zeta = 0$	HSBT ^M	8.2961	6.3630	5.5274
		$\zeta = h/4$	HSBT ^M	9.5607	7.3732	6.4144
		$\zeta = h/2$	HSBT ^M	12.6144	9.7969	8.5385
		$\zeta = h$	HSBT ^M	20.7296	16.1946	14.1358
C-C		$\zeta = 0$	HSBT[84]	19.8063	15.3661	13.4427
		$\zeta = 0$	HSBT ^M	19.8906	15.4281	13.4944
		$\zeta = h/4$	HSBT ^M	22.5962	17.5680	15.3616
		$\zeta = h/2$	HSBT ^M	29.2328	22.8038	19.9321
		$\zeta = h$	HSBT ^M	47.1565	36.8971	32.2399

M: Micro Beam

Figures. 5.2-5.3 show variation of the natural frequencies and the normalized critical temperature (λ) with respect to ζ/h ratio of $L/h=5$ beams. As ζ/h increases, their variation depends on BCs. The C – C beam has the biggest variation and the C – F beam has the smallest variation.

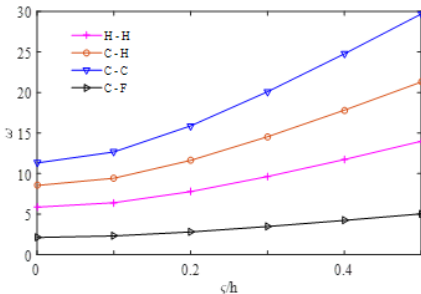


Figure 5.2 Effect of MLSP on the natural frequencies (ω) of FG micro beams ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$) with NLT, $p=1$, $L/h=5$, various BCs

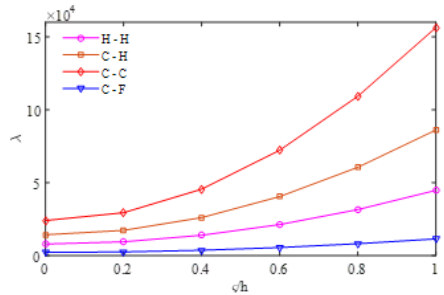


Figure 5.3 Effect of MLSP on the normalized critical temperature (λ) of FG micro beams ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$) with NLT, $p=1$, $L/h=5$, various BCs

5.7 Conclusions

The free vibration analysis of FG nano beams modeled according to Timoshenko beam theory is studied. The size-dependent (nonlocal) effect is introduced according to Eringen's nonlocal elasticity model. The vibrational problem governing the axial and lateral deformations is derived using the virtual-work principle. Ritz method is used to approximate the axial and lateral displacements, respectively. The fundamental frequencies of a FG nano beams are investigated versus the nonlocal and material-distribution parameters for different BCs of FG nano beams. The obtained results show that, the material-distribution profile may be manipulated to select a specific design frequency. It is also shown that, the nonlocal parameter has a notable effect on the fundamental frequencies of FG nano beams.

The size effect, which is included by the modified couple stress theory, on vibration and thermal buckling behaviors of FG micro beams is investigated in this chapter 5. The governing equations of motion are derived from Lagrange's equations. The frequencies, critical buckling loads, displacements and stresses of FG micro beams with various BCs are obtained. The results indicate that the present study is efficiency for predicting behaviors of FG micro beams.

Chapter 6 A finite element model for analysis of FG beams

6.1 Introduction

In this chapter, which is extended from the previous work [5], finite element model for vibration and buckling of FG beams is studied. The developed theory accounts for parabolic variation of the transverse shear strain and stress through the beam depth, and satisfy the stress-free boundary conditions on the top and bottom surfaces of the beam. Governing equations of motion and boundary conditions are derived from the Hamilton's principle. Effects of power-law index, span-to-height ratio and various boundary conditions on the natural frequencies, critical buckling loads and load-frequency curves of sandwich beams are discussed. Numerical results show that the above-mentioned effects play very important role on the vibration and buckling analysis of FG beams.

6.2 Finite element formulation

6.2.1 FG beams

Geometry of FG beams as in Figure 2.6a with rectangular section $b \times h$ and length L . In this study, it is made of a mixture of isotropic ceramic and metal whose properties vary continuously in the beam, i.e., Young modulus E , Poisson's ratio ν , mass density ρ vary exponentially in both axial (x – axis) and the thickness directions (z – axis) in Eq. .

6.2.2 Higher-order shear deformation beam theory

The displacement field of the present theory can be obtained as (HSBT1):

$$u_1(x, z, t) = u(x, t) - zw_{,x}(x, t) + \left[\sinh^{-1}\left(\frac{rz}{h}\right) - \frac{8rz^3}{3h^3\sqrt{r^2+4}} \right] \theta(x, t) \quad (r=1) \quad (6.1)$$

$$u_3(x, z, t) = w(x, t)$$

where u, θ are the mid-plane axial displacement and rotation, w denotes the mid-plane transverse displacement of the beam, the comma indicates partial differentiation with respect to the coordinate subscript that follows.

The nonzero strains associated with the displacement field are:

$$\varepsilon_x(x, z, t) = u_{,x} - zw_{,xx} + f\theta_{,x}, \quad \gamma_{xz}(x, z, t) = f_{,z}(z)\theta \quad (6.2)$$

where $\varepsilon^0, \varepsilon^1$, and ε^2 are the axial strain and curvatures of the beam, respectively.

6.2.3 Constitutive Equations

The strains and stresses are related by:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{13} & 0 \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

6.2.4 Variational Formulation

In order to derive the equations of motion, Hamilton's principle is used:

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (6.4)$$

where $\delta U, \delta V$ and δK denote the virtual variation of the strain energy, kinetic energy and potential energy, respectively. The variation of the strain energy can be stated as:

$$\delta U = \int_0^L \left[N_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - M_x^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + Q_x \delta \gamma_{xz} \right] b dx \quad (6.5)$$

where $dA = dx dy$ và $N_x, M_x^b, M_x^s, Q_{xz}$ are the stress resultants, defined as:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(z) b dz, \quad M_x^b = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx}(z) b dz, \quad M_x^s = \int_{-h/2}^{h/2} f \sigma_{xx}(z) b dz, \quad Q_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} f_{,z} \sigma_{xz}(z) b dz \quad (6.6)$$

By using Eqs. (6.2), (6.3) and (6.6), the constitutive equations for stress resultants and strains are obtained:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x^b \\ M_x^s \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s & 0 \\ B & D & D^s & 0 \\ B^s & D^s & H^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ w_{,xx} \\ \theta_{,x} \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

The variation of the potential energy by the axial force N_{xx}^0 can be written as:

$$\delta V = - \int_0^L N_{xx}^0 w_{,x} \delta w_{,x} b dx \quad (6.8)$$

The variation of the kinetic energy can be expressed as:

$$\delta K = \int_0^L \left[\delta \dot{u} (I_0 \ddot{u} - I_1 \dot{w}_{,x} + J_1 \dot{\theta}) + \delta \dot{\theta} (I_0 \dot{\theta}) + \delta \dot{w}_{,x} (-I_1 \dot{u} + I_2 \dot{w}_{,x} - J_2 \dot{\theta}) + \delta \dot{\theta} (J_1 \dot{u} - J_2 \dot{w}_{,x} + K_2 \dot{\theta}) \right] dx \quad (6.9)$$

By substituting Eqs. (6.5), (6.8) and (6.9) into Eq. (6.4), the following weak statement is obtained

$$0 = \int_0^L \int_0^t \left[N_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - M_x^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + Q_x \delta \gamma_{,x} - N_{xx}^0 w_{,x} \delta w_{,x} - (\delta \dot{u} (I_0 \ddot{u} - I_1 \dot{w}_{,x} + J_1 \dot{\theta}) + \delta \dot{\theta} (I_0 \dot{\theta}) + \delta \dot{w}_{,x} (-I_1 \dot{u} + I_2 \dot{w}_{,x} - J_2 \dot{\theta}) + \delta \dot{\theta} (J_1 \dot{u} - J_2 \dot{w}_{,x} + K_2 \dot{\theta})) \right] dx dt \quad (6.10)$$

6.2.5 Governing Equations of Motion

The equilibrium equations of the present study can be obtained by integrating the derivatives of the varied quantities by parts and collecting the coefficients of δu , δw and $\delta \theta$:

$$\begin{aligned} \delta u: \frac{\partial N_x}{\partial x} &= I_0 \ddot{u} - I_1 \ddot{w}_{,x} + J_1 \ddot{\theta} \\ \delta w: \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + N_{xx}^0 w_{,xx} + q &= -I_1 \ddot{u}_{,x} + I_2 \ddot{w}_{,xx} - J_2 \ddot{\theta}_{,x} \\ \delta \theta: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + Q_{,xx} &= J_1 \ddot{u}_{,x} - J_2 \ddot{w}_{,xx} + K_2 \ddot{\theta}_{,x} + I_0 \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (6.11)$$

By substituting Eq. (6.7) into Eq. (6.11), the explicit form of the governing equations of motion can be expressed with respect to the stiffness's

$$\begin{aligned} \delta u: Au_{,xx} - Bw_{,xxx} + B^s \theta_{,xx} &= I_0 \ddot{u} - I_1 \ddot{w}_{,x} + J_1 \ddot{\theta} \\ \delta w: Bu_{,xxx} - Dw_{,xxxx} - D^s \theta_{,xxx} + q + N_{xx}^0 w_{,xx} &= -I_1 \ddot{u}_{,x} + I_2 \ddot{w}_{,xx} - J_2 \ddot{\theta}_{,x} \\ \delta \theta: B^s u_{,xxx} - D^s w_{,xxxx} - H^s \theta_{,xxx} + A^s \theta_{,xx} &= J_1 \ddot{u}_{,x} - J_2 \ddot{w}_{,xx} + K_2 \ddot{\theta}_{,x} + I_0 \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (6.12)$$

6.2.6 Finite Element Formulation

The present theory for FG beams described in the previous chapter was implemented via a displacement based finite element method. The variational statement in Eq. (6.13) requires that the axial displacement u and rotation θ are only once differentiable and C^0 -continuous, whereas the transverse displacement w must be twice differentiable and C^1 -continuous. The field variables are therefore approximated as follows:

$$u(x) = \sum_{j=1}^2 u_j \psi_j^e(x), \quad w(x) = \sum_{j=1}^4 \Delta w_j \varphi_j^e(x), \quad \theta_x(x) = \sum_{j=1}^2 \theta_j \psi_j^e(x) \quad (6.13)$$

In order to satisfy the continuity of C^0 of the axial displacement and rotation, Lagrange's shape functions are hence chosen, which are given as in Eq. (6.14) and plotted in Figure 6.1.

$$\psi_1(x) = 1 - \frac{x}{l_e}, \psi_2(x) = \frac{x}{l_e} \quad (6.14)$$

Moreover, in order to satisfy the C^1 -continuity condition of the transverse displacement, a second-order polynomial can be selected for the shape function, however it requires a three-node finite element with 3 values of associated node displacement. In practice, this approach is complicated to implement and programming. Moreover, it is observed that the essential variables of the beams [28] are $u, w, w_{,x}, \theta$, that enables to use a two-node finite element and a Hermite-cubic interpolation function.

The transverse displacement of the beams is therefore approximated as follows:

$$w(x) = w_1\phi_1^e + \beta_1\phi_2^e + w_2\phi_3^e + \beta_2\phi_4^e = \sum_{j=1}^4 \Delta w_j \phi_j^e(x) \quad (6.15)$$

where the shape functions $\phi_j^e(x)$ are given by:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{l_e}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l_e}\right)^3; & \phi_2(x) &= x - \frac{2x^2}{l_e} + \frac{x^3}{l_e^2} \\ \phi_3(x) &= 3\left(\frac{x}{l_e}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l_e}\right)^3; & \phi_4(x) &= -\frac{x^2}{l_e} + \frac{x^3}{l_e^2} \end{aligned} \quad (6.16)$$

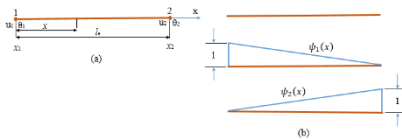


Figure 6.1 Two-nodes beam element

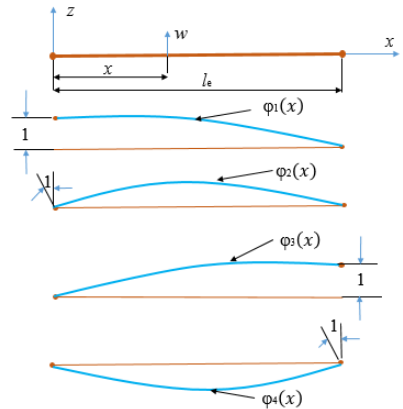


Figure 6.2 Hermite shape functions in a beam element

The variations of these shape functions are also displayed in Figure 6.2 in which it is observed that the shape functions satisfy the delta knoneckor condition.

Substituting these expressions in Eqs. (6.14, 6.16) into the corresponding weak statement in Eq. (6.10), the finite element model of a typical element can be expressed as the standard eigenvalue problem:

$$\left(\mathbf{K} - N_{xx}^0 \mathbf{G} - \omega^2 \mathbf{M} \right) \boldsymbol{\chi} = \mathbf{0} \quad (6.14)$$

where \mathbf{K} , \mathbf{G} and \mathbf{M} are the element stiffness matrix, element geometric stiffness matrix and element mass matrix, respectively.

6.3 Numerical results and discussions

For verification purpose, the fundamental natural frequencies and critical buckling loads of FG beams with different values of span-to-height ratio for three boundary conditions, which are Clamped – Clamped (C – C), Clamped – Free (C – F) and Simply – Supported (S – S) are given in **Tables 1-4**. FG material properties are assumed to be:

Table 6.1 Ceramic and metal materials.

Materials	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	ν
Alumina (Al ₂ O ₃)	380	3960	0.3
Aluminum (Al)	70	2702	0.3

For simplicity, the non-dimensional natural frequencies and critical buckling loads are defined as:

$$\bar{N}_{cr} = N_{cr} \frac{12L^2}{E_m h^3}, \bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (6.15)$$

Therefore, this number of elements is used throughout the numerical examples. The results obtained from the present theory are compared with those of HSBT [5] and [74]. As first studied, Tables 6.2-6.3 present the comparison of the natural frequencies and critical buckling loads of FG beams (type A) with three boundary conditions. They are calculated for various values of the power-law index and compared to the solutions obtained from the third-order shear deformation beam theory (TSBT) ([5], [74]). It is seen that the solutions obtained derived from the proposed theory are in excellent agreement with those obtained from previous results for both deep and thin beams.

Figures. 6.3-6.4 display the variation of the fundamental frequency and critical buckling load with respect to the power-law index and span-to-depth ratio of FG beams. Three curves are observed for three boundary conditions, the highest curve corresponds to the C-C case and the lowest one is the C-F case. The results decrease with an increase of the power-law index.

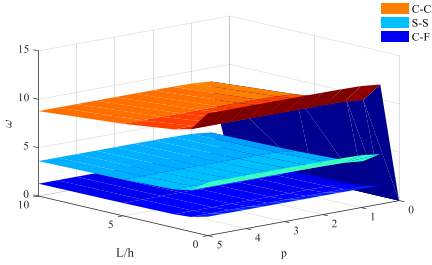


Figure 6.3 Effects of the power-law index p and span-to-depth ratio L/h on the nondimensional fundamental frequency ($\bar{\omega}$)

of FG beams

Table 6.2 Comparison of the non-dimensional fundamental natural frequency of FG beams with various boundary conditions ($L/h=5$).

L/h	BCs	Reference	p					
			0	0.5	1	2	5	10
5	S-S	HSBT [74]	5.1527	4.4107	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816
		HSBT ^F	5.1528	4.4011	3.9711	3.5972	3.3736	3.2650
	C-C	HSBT [74]	10.0699	8.7463	7.9499	7.1766	6.4940	6.1652
		HSBT ^F	10.0698	8.7439	7.9501	7.1768	6.4932	6.1654
	C-F	HSBT [74]	1.8952	1.6182	1.4633	1.3325	1.2592	1.2183
		HSBT ^F	1.8952	1.6178	1.4633	1.3326	1.2592	1.2184

Table 6.3 Comparison of the non-dimensional critical buckling load of FG beams with various boundary conditions ($L/h=5$, type A).

L/h	BCs	Reference	p					
			0	0.5	1	2	5	10
5	S-S	HSBT [5]	48.8406	32.0013	24.6894	19.1577	15.7355	14.1448
		HSBT ^F	48.5960	31.8593	24.5841	19.0710	15.6425	14.0509
	C-C	HSBT [5]	154.5610	103.7167	80.5940	61.7666	47.7174	41.7885
		HSBT ^F	152.1513	102.2467	79.4884	60.8802	46.8791	40.9865
	C-F	HSBT [5]	13.0771	8.5000	6.5427	5.0977	4.2772	3.8820
		HSBT ^F	13.0595	8.4900	6.5352	5.0916	4.2703	3.8748

F: Finite element method

6.4 Conclusions

Based on refined shear deformation theory, vibration and buckling of FG beams is presented. Governing equations of motion and various boundary conditions are derived from the Hamilton's principle. Finite element model is developed to determine the natural frequencies, critical buckling loads. Effects of power-law index, span-to-height ratio, and various boundary conditions are discussed. The present model can provide accurate and reliable results in analyzing vibration and buckling problem of FG beams.

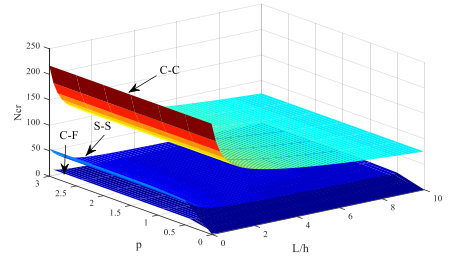


Figure 6.4 Effects of the power-law index p and span-to-depth ratio L/h on the critical buckling load (N_{cr}) of FG beams

Chapter 7 Conclusions and Recommendations

7.1 Conclusions

In this dissertation, the author has proposed some beam models for static, buckling and vibration analysis of functionally graded isotropic and sandwich beams embedded in hygro-thermo-mechanical environments.

The main conclusions of the thesis can be summarized as follows

- ✦ The dissertation has introduced a brief literature review on computational theories and methods of composite beams, from which several novel findings were found and proposed.
- ✦ It presented more details of the composite materials, its microstructure and method of estimating the effective elastic properties. A literature reviews also focused on the topics that are relevant to this research, such as beam theories, analytical and numerical approaches for bending, buckling and vibration analysis of beams in Hygro-thermo-mechanical environment.
- ✦ The thesis proposed a novel general higher-order shear deformation beam theory for analysis of functionally graded beams. A general theoretical formulation of higher-order shear deformation beam theory is derived from the fundamental of two-dimensional elasticity theory and then novel different higher-order shear deformation beam theories are obtained. Moreover, two other beam models are also proposed. A HSBT model with a new inverse hyperbolic-sine higher-order shear function and a novel three-variable quasi-3D shear deformation beam theory for analysis of functionally graded beams are proposed.
- ✦ It investigated effects of moisture and temperature rises on vibration and buckling responses of functionally graded beams. The present work was based on a higher-order shear deformation theory which accounts for a hyperbolic distribution of both in-plane and out-of-plane displacements. The temperature and moisture are supposed to be varied uniformly, linearly and non-linearly.
- ✦ The effects of scale-size on the buckling and vibration behaviors of functionally graded beams is proposed in thermal environments. A general theoretical formulation is derived from the fundamental of two-dimensional elasticity theory. The effects of boundary conditions on the behaviors of functionally graded beam are considered.
- ✦ A finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on a refined shear deformation theory is presented. Governing equations of motion and boundary conditions are derived from the Hamilton's principle. Effects of power-law index, span-to-height ratio and various boundary conditions on the natural frequencies, critical buckling loads of functionally graded beams are discussed.

7.2 Recommendations

During the research process, the thesis also encountered certain difficulties and limitations. Therefore, some problems exist in the thesis which will be developed in the near future:

- ✚ Analysis of FGM beam behavior with different numerical methods should also be considered soon.
- ✚ Develop two-dimensional elasticity solution for vibration analysis of composite beams with various boundary conditions
- ✚ Develop FGM beam models with more complex geometry
- ✚ Develop and analyze behavior behaviours of thin-walled FG beam and FG sandwich beams

References

- [1] Y. Ghugal and R. Shimpi, "A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams," *Journal of reinforced plastics and composites*, vol. 20, pp. 255-272, 2001.
- [2] A. S. Sayyad and Y. M. Ghugal, "Modeling and analysis of functionally graded sandwich beams: A review," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, pp. 1-20, 2018.
- [3] T.-K. Nguyen, K. Sab, and G. Bonnet, "First-order shear deformation plate models for functionally graded materials," *Composite Structures*, vol. 83, pp. 25-36, 2008.
- [4] T.-K. Nguyen, T. P. Vo, and H.-T. Thai, "Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory," *Composites Part B: Engineering*, vol. 55, pp. 147-157, 2013.
- [5] T.-K. Nguyen, T. T.-P. Nguyen, T. P. Vo, and H.-T. Thai, "Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory," *Composites Part B: Engineering*, vol. 76, pp. 273-285, 2015.
- [6] J. Mantari, A. Oktem, and C. G. Soares, "A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates," *Composites Part B: Engineering*, vol. 43, pp. 1489-1499, 2012.
- [7] T. P. Vo, H.-T. Thai, T.-K. Nguyen, and F. Inam, "Static and vibration analysis of functionally graded beams using refined shear deformation theory," *Meccanica*, vol. 49, pp. 155-168, 2014.
- [8] T.-K. Nguyen, "A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials," *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, vol. 11, pp. 203-219, 2015.
- [9] H.-T. Thai, T. P. Vo, T. Q. Bui, and T.-K. Nguyen, "A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates," *Acta Mechanica*, vol. 225, pp. 951-964, 2014.
- [10] A. C. Eringen, "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves," *Journal of applied physics*, vol. 54, pp. 4703-4710, 1983.
- [11] J. Peddieson, G. R. Buchanan, and R. P. McNitt, "Application of nonlocal continuum models to nanotechnology," *International Journal of Engineering Science*, vol. 41, pp. 305-312, 2003.

- [12] F. Yang, A. Chong, D. C. C. Lam, and P. Tong, "Couple stress based strain gradient theory for elasticity," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, pp. 2731-2743, 2002.
- [13] R. A. Toupin, "Elastic materials with couple-stresses," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 11, pp. 385-414, 1962.
- [14] R. Mindlin and H. Tiersten, "Effects of couple-stresses in linear elasticity," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 11, pp. 415-448, 1962.
- [15] W. Koiter, "Couple-stress in the theory of elasticity," in *Proc. K. Ned. Akad. Wet.*, 1964, pp. 17-44.
- [16] R. D. Mindlin, "Micro-structure in linear elasticity," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 16, pp. 51-78, 1964.
- [17] S. Park and X. Gao, "Bernoulli–Euler beam model based on a modified couple stress theory," *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 16, p. 2355, 2006.
- [18] J. Reddy, "Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 59, pp. 2382-2399, 2011.
- [19] M. Şimşek, "Nonlocal effects in the forced vibration of an elastically connected double-carbon nanotube system under a moving nanoparticle," *Computational Materials Science*, vol. 50, pp. 2112-2123, 2011.
- [20] M. Aydogdu and V. Taskin, "Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges," *Materials & design*, vol. 28, pp. 1651-1656, 2007.
- [21] T. Kant and K. Swaminathan, "Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory," *Composite structures*, vol. 56, pp. 329-344, 2002.
- [22] M. Aydogdu, "Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 47, pp. 1740-1755, 2005.
- [23] K. Pradhan and S. Chakraverty, "Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method," *Composites Part B: Engineering*, vol. 51, pp. 175-184, 2013.
- [24] M. Şimşek, "Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz method," *International Journal of Engineering & Applied Sciences*, vol. 1, pp. 1-11, 2009.
- [25] R. Bellman and J. Casti, "Differential quadrature and long-term integration," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 34, pp. 235-238, 1971.
- [26] P. Sharma, "Efficacy of Harmonic Differential Quadrature method to vibration analysis of FGPM beam," *Composite Structures*, vol. 189, pp. 107-116, 2018.
- [27] M. F. Shojaei and R. Ansari, "Variational differential quadrature: a technique to simplify numerical analysis of structures," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 49, pp. 705-738, 2017.
- [28] J. N. Reddy, "A simple higher-order theory for laminated composite plates," *Journal of applied mechanics*, vol. 51, pp. 745-752, 1984.

- [29] V. Kahya and M. Turan, "Vibration and stability analysis of functionally graded sandwich beams by a multi-layer finite element," *Composites Part B: Engineering*, vol. 146, pp. 198-212, 2018.
- [30] J. Lin, J. Li, Y. Guan, G. Zhao, H. Naceur, and D. Couellier, "Geometrically Nonlinear bending analysis of functionally graded beam with variable thickness by a meshless method," *Composite Structures*, vol. 189, pp. 239-246, 2018.
- [31] T. Bui, A. Khosravifard, C. Zhang, M. Hematiyan, and M. Golub, "Dynamic analysis of sandwich beams with functionally graded core using a truly meshfree radial point interpolation method," *Engineering structures*, vol. 47, pp. 90-104, 2013.
- [32] T. Yu, H. Hu, J. Zhang, and T. Q. Bui, "Isogeometric analysis of size-dependent effects for functionally graded microbeams by a non-classical quasi-3D theory," *Thin-Walled Structures*, vol. 138, pp. 1-14, 2019.
- [33] T. Yu, J. Zhang, H. Hu, and T. Q. Bui, "A novel size-dependent quasi-3D isogeometric beam model for two-directional FG microbeams analysis," *Composite Structures*, vol. 211, pp. 76-88, 2019.
- [34] T. N. Nguyen, C. H. Thai, and H. Nguyen-Xuan, "On the general framework of high order shear deformation theories for laminated composite plate structures: a novel unified approach," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 110, pp. 242-255, 2016.
- [35] T. N. Nguyen, T. D. Ngo, and H. Nguyen-Xuan, "A novel three-variable shear deformation plate formulation: Theory and Isogeometric implementation," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 326, pp. 376-401, 2017.
- [36] C. H. Thai, A. Ferreira, and H. Nguyen-Xuan, "Isogeometric analysis of size-dependent isotropic and sandwich functionally graded microplates based on modified strain gradient elasticity theory," *Composite Structures*, vol. 192, pp. 274-288, 2018.
- [37] G. Liu, K. Dai, and T. T. Nguyen, "A smoothed finite element method for mechanics problems," *Computational Mechanics*, vol. 39, pp. 859-877, 2007.
- [38] T. Nguyen-Thoi, T. Bui-Xuan, P. Phung-Van, H. Nguyen-Xuan, and P. Ngo-Thanh, "Static, free vibration and buckling analyses of stiffened plates by CS-FEM-DSG3 using triangular elements," *Computers & structures*, vol. 125, pp. 100-113, 2013.
- [39] T. Nguyen-Thoi, P. Phung-Van, S. Nguyen-Hoang, and Q. Lieu-Xuan, "A coupled alpha-FEM for dynamic analyses of 2D fluid–solid interaction problems," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 271, pp. 130-149, 2014.
- [40] N. D. Duc, K. Seung-Eock, and D. Q. Chan, "Thermal buckling analysis of FGM sandwich truncated conical shells reinforced by FGM stiffeners resting on elastic foundations using FSDT," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 41, pp. 331-365, 2018.
- [41] N. D. Duc, K. Seung-Eock, T. Q. Quan, D. D. Long, and V. M. Anh, "Nonlinear dynamic response and vibration of nanocomposite multilayer organic solar cell," *Composite Structures*, vol. 184, pp. 1137-1144, 2018.
- [42] N. D. Duc, K. Seung-Eock, N. D. Tuan, P. Tran, and N. D. Khoa, "New approach to study nonlinear dynamic response and vibration of sandwich composite cylindrical panels with auxetic honeycomb core layer," *Aerospace Science and Technology*, vol. 70, pp. 396-404, 2017.

- [43] N. D. Duc and H. Van Tung, "Mechanical and thermal postbuckling of higher order shear deformable functionally graded plates on elastic foundations," *Composite Structures*, vol. 93, pp. 2874-2881, 2011.
- [44] T. I. Thinh, "Static behavior and vibration control of piezoelectric cantilever composite plates and comparison with experiments," *Computational Materials Science*, vol. 49, pp. S276-S280, 2010.
- [45] T. I. Thinh and T. H. Quoc, "Finite element modeling and experimental study on bending and vibration of laminated stiffened glass fiber/polyester composite plates," *Computational Materials Science*, vol. 49, pp. S383-S389, 2010.
- [46] H. Van Tung, "Thermal and thermomechanical postbuckling of FGM sandwich plates resting on elastic foundations with tangential edge constraints and temperature dependent properties," *Composite Structures*, vol. 131, pp. 1028-1039, 2015.
- [47] H. Van Tung, "Nonlinear axisymmetric response of FGM shallow spherical shells with tangential edge constraints and resting on elastic foundations," *Composite Structures*, vol. 149, pp. 231-238, 2016.
- [48] D. K. Nguyen, "Large displacement behaviour of tapered cantilever Euler–Bernoulli beams made of functionally graded material," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 237, pp. 340-355, 2014.
- [49] D. K. Nguyen, "Large displacement response of tapered cantilever beams made of axially functionally graded material," *Composites Part B: Engineering*, vol. 55, pp. 298-305, 2013.
- [50] T.-K. Nguyen, N.-D. Nguyen, T. P. Vo, and H.-T. Thai, "Trigonometric-series solution for analysis of laminated composite beams," *Composite Structures*, vol. 160, pp. 142-151, 2017.
- [51] T.-K. Nguyen, V.-H. Nguyen, T. Chau-Dinh, T. P. Vo, and H. Nguyen-Xuan, "Static and vibration analysis of isotropic and functionally graded sandwich plates using an edge-based MITC3 finite elements," *Composites Part B: Engineering*, vol. 107, pp. 162-173, 2016.
- [52] N. Quan, N. H. Son, and N. Q. Tuan, "Minimum Volume of the Longitudinal Fin with Rectangular and Triangular Profiles by a Modified Newton–Raphson Method," *International Journal of Computational Methods*, vol. 15, p. 1850034, 2018.
- [53] M. Koizumi, "FGM activities in Japan," *Composites Part B: Engineering*, vol. 28, pp. 1-4, 1997.
- [54] S. Suresh and A. Mortensen, *Fundamentals of functionally graded materials: The Institut of Materials*, 1998.
- [55] Y. Miyamoto, W. Kaysser, B. Rabin, A. Kawasaki, and R. G. Ford, *Functionally graded materials: design, processing and applications vol. 5: Springer Science & Business Media*, 2013.
- [56] M. Dao, P. Gu, A. Maewal, and R. Asaro, "A micromechanical study of residual stresses in functionally graded materials," *Acta materialia*, vol. 45, pp. 3265-3276, 1997.

- [57] K. Wakashima, T. Hirano, and M. Niino, "Functionally Gradient Materials(Fgm) Architecture: A New Type of Ceramic-Metal Assemblage Designed for Hot Structural Components," 1990.
- [58] F. Ebrahimi and A. Jafari, "A higher-order thermomechanical vibration analysis of temperature-dependent FGM beams with porosities," *Journal of Engineering*, vol. 2016, 2016.
- [59] Y. Kiani and M. Eslami, "An exact solution for thermal buckling of annular FGM plates on an elastic medium," *Composites Part B: Engineering*, vol. 45, pp. 101-110, 2013.
- [60] F. Fazzolari and E. Carrera, "Thermal stability of FGM sandwich plates under various through-the-thickness temperature distributions," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 37, pp. 1449-1481, 2014.
- [61] B. Akgöz and Ö. Civalek, "Strain gradient elasticity and modified couple stress models for buckling analysis of axially loaded micro-scaled beams," *International Journal of Engineering Science*, vol. 49, pp. 1268-1280, 2011.
- [62] M. Aydogdu, "Semi-inverse method for vibration and buckling of axially functionally graded beams," *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 27, pp. 683-691, 2008.
- [63] B. Akgöz and Ö. Civalek, "Analysis of micro-sized beams for various boundary conditions based on the strain gradient elasticity theory," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 82, pp. 423-443, 2012.
- [64] A. H. Akbarzadeh, A. Abedini, and Z. T. Chen, "Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates," *Composite Structures*, vol. 119, pp. 598-609, 2015/01/01/ 2015.
- [65] B. Akgöz and Ö. Civalek, "Application of strain gradient elasticity theory for buckling analysis of protein microtubules," *Current Applied Physics*, vol. 11, pp. 1133-1138, 2011.
- [66] S. Akavci and A. Tanrikulu, "Buckling and free vibration analyses of laminated composite plates by using two new hyperbolic shear-deformation theories," *Mechanics of Composite Materials*, vol. 44, p. 145, 2008.
- [67] M. Benatta, I. Mechab, A. Tounsi, and E. A. Bedia, "Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects," *Computational Materials Science*, vol. 44, pp. 765-773, 2008.
- [68] C. W. Bert, S. Jang, and A. Striz, "Nonlinear bending analysis of orthotropic rectangular plates by the method of differential quadrature," *Computational Mechanics*, vol. 5, pp. 217-226, 1989.
- [69] Y. S. Al Rjoub and A. G. Hamad, "Free vibration of functionally Euler-Bernoulli and Timoshenko graded porous beams using the transfer matrix method," *KSCE Journal of Civil Engineering*, vol. 21, pp. 792-806, 2017.
- [70] A. C. Eringen, "Nonlocal polar elastic continua," *International journal of engineering science*, vol. 10, pp. 1-16, 1972.

- [71] M. Şimşek, "Buckling of Timoshenko beams composed of two-dimensional functionally graded material (2D-FGM) having different boundary conditions," *Composite Structures*, vol. 149, pp. 304-314, 2016.
- [72] E. Reissner, "ON TRANVERSE BENDING OF PLATES, INCLUDING THE EFFECT OF TRANVERSE SHEAR DEFORMATION," 1974.
- [73] G. Shi, "A new simple third-order shear deformation theory of plates," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, pp. 4399-4417, 2007.
- [74] H.-T. Thai and T. P. Vo, "Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 62, pp. 57-66, 2012.
- [75] T. P. Vo, H.-T. Thai, T.-K. Nguyen, F. Inam, and J. Lee, "A quasi-3D theory for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams," *Composite Structures*, vol. 119, pp. 1-12, 2015.
- [76] P. Malekzadeh and S. Monajjemzadeh, "Dynamic response of functionally graded beams in a thermal environment under a moving load," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 23, pp. 248-258, 2016.
- [77] T.-K. Nguyen and B.-D. Nguyen, "A new higher-order shear deformation theory for static, buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich beams," *Journal of Sandwich Structures & Materials*, vol. 17, pp. 613-631, 2015.
- [78] N. Wattanasakulpong, B. G. Prusty, and D. W. Kelly, "Thermal buckling and elastic vibration of third-order shear deformable functionally graded beams," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, pp. 734-743, 2011.
- [79] L. C. Trinh, T. P. Vo, H.-T. Thai, and T.-K. Nguyen, "An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads," *Composites Part B: Engineering*, vol. 100, pp. 152-163, 2016.
- [80] F. Ebrahimi and E. Salari, "Nonlocal thermo-mechanical vibration analysis of functionally graded nanobeams in thermal environment," *Acta Astronautica*, vol. 113, pp. 29-50, 2015.
- [81] S. Esfahani, Y. Kiani, and M. Eslami, "Non-linear thermal stability analysis of temperature dependent FGM beams supported on non-linear hardening elastic foundations," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 69, pp. 10-20, 2013.
- [82] F. Ebrahimi and M. R. Barati, "A unified formulation for dynamic analysis of nonlocal heterogeneous nanobeams in hygro-thermal environment," *Applied Physics A*, vol. 122, p. 792, 2016.
- [83] M. Eltaher, S. A. Emam, and F. Mahmoud, "Free vibration analysis of functionally graded size-dependent nanobeams," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, pp. 7406-7420, 2012.
- [84] T.-K. Nguyen, B.-D. Nguyen, T. P. Vo, and H.-T. Thai, "Hygro-thermal effects on vibration and thermal buckling behaviours of functionally graded beams," *Composite Structures*, vol. 176, pp. 1050-1060, 2017.